



CISIA

Consorzio Interuniversitario
Sistemi Integrati per l'Accesso

IL TEST CISIA INGEGNERIA

Matematica

Quesiti commentati e risolti

M



IL TEST CISIA INGEGNERIA

Matematica

Quesiti commentati e risolti

Curatori:

Matematica: GIOCONDA MOSCARIELLO, ANTONIA PASSARELLI, GABRIELLA ZECCA e VINCENZO FERONE

Analisi e studi statistici: GIUSEPPE FORTE, GIORGIO FILIPPI, CLAUDIO CASAROSA, FEDEICA LICARI



© 2018 Edizioni CISIA
ISBN: 9788894356724

Copyright © 2018
CISIA – Consorzio interuniversitario Sistemi integrati per l'accesso - All rights reserved.

CISIA

Presidente

Prof. Andrea Stella

Università degli Studi di Padova

Vice presidente

Prof. Bianca Maria Lombardo

Università degli Studi di Catania

Direttore

Prof. Claudio Casarosa

Università di Pisa

Consiglio Scientifico

Prof. Claudio Beccari

Politecnico di Torino

Prof. ssa Anna Ciampolini

Alma Mater Studiorum Università di Bologna

Prof. ssa Gioconda Moscariello

Università degli Studi di Napoli – Federico II

Prof. Marco Lonzi

Università degli Studi di Siena

Prof. ssa Alessandra Petrucci

Università degli Studi di Firenze

Prof. Roberto Piazza

Politecnico di Milano

Consiglio Direttivo

Prof. Andrea Stella

Università degli Studi di Padova

Prof.ssa Bianca Maria Lombardo

Università di Catania

Prof. Claudio Casarosa

Università di Pisa

Prof. Alessandro Pozzetti

Politecnico di Milano

Prof. Paolo Villani

Università degli Studi di Salerno

Direttore Tecnico

Giuseppe Forte

Sede

Via Malagoli, 12

56124 PISA

www.cisiaonline.it

www.facebook.com/consorziocisia

Presentazione

Il CISIA è stato costituito nel 2005 come Centro Interuniversitario per l'accesso alle Scuole di Ingegneria e Architettura, ed ha esteso nel tempo la propria sfera d'azione. All'inizio del 2010 diventa Consorzio Interuniversitario Sistemi Integrati per l'Accesso mantenendo lo stesso acronimo. Si occupa attualmente sia della predisposizione che dell'attuazione delle prove di ingresso per diversi corsi di laurea delle aree di Ingegneria, Economia, Farmacia e Scienze delle Università Italiane. Dal 2017, grazie al lavoro condiviso di diverse sedi universitarie, il CISIA ha iniziato la sperimentazione per l'erogazione di test standard per l'accesso ai corsi di area umanistica e dal 2018 per i corsi dell'area di Agraria. Da qualche anno ha sviluppato l'erogazione via web dei test attraverso il progetto TOLC (Test on line CISIA): TOLC-I ed English TOLC-I per l'Ingegneria, TOLC-E ed English TOLC-E per l'Economia, TOLC-F per Farmacia, TOLC-S e TOLC-B per le scienze. Questi test sono utilizzati da molte sedi in sostituzione o in modo complementare rispetto ai test cartacei.

Nella maggioranza dei casi i test hanno finalità solo orientative e si inseriscono nelle iniziative che le diverse università attuano per l'orientamento in ingresso; solo per alcuni corsi di laurea a numero programmato, i test sono utilizzati in modo selettivo.

I risultati conseguiti nel test possono servire agli studenti per decidere se iscriversi o no ad un corso di laurea, ma attualmente servono anche agli atenei per ottemperare al dettato di legge che prescrive di verificare la presenza di eventuali carenze formative e di fornire agli studenti che ne abbiano bisogno gli strumenti necessari per colmarle. Per questo i corsi di laurea degli atenei, nei loro regolamenti, indicano il tipo di carenze e, in genere, definiscono gli Obblighi Formativi Aggiuntivi (OFA) che gli studenti, se carenti, debbono soddisfare.

È ovvio che l'informazione fornita mediante il test di ammissione, con l'eventuale attribuzione degli OFA, è vitale per gli studenti carenti; non viene impedito loro di immatricolarsi, ma se gravati da OFA avranno un carico didattico piuttosto pesante che, per i meno motivati o i più deboli di loro, potrebbe risultare un ostacolo di una certa difficoltà. Nel caso dei corsi di laurea per i quali gli Atenei hanno imposto il numero programmato, il test ha valore di concorso di ammissione. Tuttavia, non entrare in graduatoria in posizione utile di solito non impedisce l'immatricolazione: in genere, infatti, viene comunque concessa per altri corsi di laurea non troppo dissimili, ma per i quali non è stabilita una quota massima di immatricolati. Per i test CISIA cartacei l'ateneo che li utilizza pubblica i risultati ottenuti dagli studenti che hanno svolto la prova presso le proprie sedi. Poiché la prova CISIA è identica e simultanea sul territorio nazionale, il test ha valore nazionale e, al momento dell'iscrizione in uno qualsiasi degli atenei partecipanti alla prova CISIA, lo studente può presentare il risultato ottenuto indipendentemente da dove ha sostenuto la prova.

La situazione è la medesima per i TOLC, test on line che sono erogati in tempi diversi e composti da quesiti diversi per i partecipanti, ma che hanno una difficoltà complessiva analoga, statisticamente validata. Anche in questo caso i risultati ottenuti da chi svolge una prova presso una sede universitaria possono essere presentati per l'iscrizione in tutte altre sedi partecipanti.

Questo piccolo volume si propone di offrire un utile riferimento agli studenti intenzionati ad affrontare il test di ammissione, in modo che sappiano che cosa ci si aspetta da loro ed acquisiscano un minimo di dimestichezza con il tipo di quesiti che troveranno nella prova. Il volume si apre con un'importante sezione dedicata alla affidabilità ed alla capacità predittiva del test che dovrebbe essere letta con molta attenzione soprattutto dagli studenti che affronteranno la prova di ingresso. Si tratta per loro di comprendere che il risultato conseguito nel test è un indicatore statistico fortemente correlato alla futura carriera universitaria; in questo senso potranno trarne utili indicazioni sul grado di impegno a cui sono chiamati per evitare difficoltà ed eccessive delusioni. Il volume poi presenta una collezione di quesiti presentati nella forma che avranno nella prova reale offrendo al lettore la

possibilità di cimentarsi in condizioni simili a quelle reali. Infine tutti i quesiti sono presentati con le rispettive soluzioni, ciascuna con un relativo commento esplicativo da parte di un esperto. Alla conclusione del commento sono riportate, in termini statistici, le percentuali ottenute da ciascuna delle cinque risposte proposte per il quesito in oggetto, ed infine le percentuali dei candidati che hanno risposto correttamente al quesito o non hanno dato nessuna risposta o hanno risposto in modo errato. Gli esperti che hanno curato questo volumetto sono docenti dell'università e della scuola media superiore che hanno fatto o continuano a far parte di gruppi di lavoro a cui è affidata la formulazione dei quesiti. I loro commenti non indicano banalmente la risposta esatta ad ogni quesito, ma spiegano perché quella risposta sia esatta e perché ciascuna delle altre sia sbagliata. Queste spiegazioni nel loro complesso offrono ai lettori delle linee guida per imparare ad affrontare quesiti a risposta multipla che, come per il passato, caratterizzeranno sicuramente la prova CISIA negli anni a venire.

Claudio Casarosa
Direttore del CISIA

Indice

Presentazione	4
La valenza predittiva dei test standard CISIA per l'Ingegneria	7
1. Introduzione	8
2. Il campione	9
3. Il test in presenza	10
4. Relazione tra scuola frequentata e punteggio al test	12
5. Relazione tra voto di diploma e punteggio al test	12
6. La progressione negli studi	13
I quesiti	17
I quesiti di Matematica	18
I quesiti commentati	39
Premessa	40
Introduzione alla Matematica	41
I quesiti di Matematica commentati	41
Le risposte esatte	115

**La valenza predittiva
dei test standard CISIA
per l'Ingegneria**

1. Introduzione

Il CISIA ha una lunga e consolidata esperienza nella realizzazione di test d'ingresso ai percorsi universitari, sviluppata negli anni a partire dai test cartacei per l'Ingegneria, e continuata estendendosi ad altre forme di erogazione e ad altre aree disciplinari coinvolgendo gruppi di studenti sempre più numerosi.

In particolare, il test in presenza per l'ingegneria (TIP), erogato in forma cartacea, è stato per molti anni il test più utilizzato negli atenei italiani per la valutazione della preparazione degli immatricolandi, la verifica dei requisiti di accesso con l'eventuale attribuzione degli OFA e la selezione degli studenti nei corsi di laurea a numero programmato. Negli anni più recenti si è assistito a un progressivo abbandono del TIP a favore del test online TOLC-I, oggi utilizzato da molte scuole di ingegneria su tutto il territorio nazionale.

L'ampia diffusione dei test CISIA (TIP e TOLC) può essere già di per sé interpretata come un indice di elevato gradimento e dunque di riconosciuta qualità.

La qualità di un test può essere tuttavia misurata in modo più rigoroso valutandone la capacità predittiva rispetto al successo nella carriera universitaria degli studenti. La predittività, infatti, conferisce ad esso elevata efficacia sia nella valutazione e nella selezione degli studenti in ingresso all'università, sia ai fini dell'orientamento delle scelte dei partecipanti. Questa valutazione può essere fatta in modo scientificamente fondato, applicando opportuni metodi statistici alla popolazione degli studenti che hanno sostenuto il test, studiando, in particolare, le relazioni tra l'esito del test e la progressione nel percorso di studio post-diploma.

Di seguito è presentato uno studio statistico, su scala nazionale, del grado di predittività dell'esito del test standard CISIA sull'evoluzione e sulla qualità delle carriere degli studenti. Si tratta di una sintesi della pubblicazione più ampia presentata durante il convegno di Napoli del 25 ottobre 2017, i cui atti completi sono disponibili sul portale CISIA (alla pagina <http://www.cisiaonline.it/convegno/>).

Lo studio si focalizza in particolare sul TIP, test in presenza, per l'ingegneria e riguarda un campione composto dagli studenti che hanno sostenuto il test nell'anno 2011 presso 13 atenei distribuiti sul territorio nazionale, per un totale di 15566 studenti. Si è scelto di condurre l'analisi sui partecipanti al TIP perché nel 2011 la quasi totalità delle sedi di ingegneria aderenti al consorzio ha svolto questo tipo di test.

La scelta dell'anno 2011 è stata inoltre motivata dalla necessità di poter monitorare le carriere degli studenti per un numero sufficiente di anni (almeno 4) a partire dal sostenimento del test di ingresso. Il periodo di riferimento per tutte le attività descritte in questo lavoro è pertanto l'intervallo 2011-2015.

Per ogni studente del campione il CISIA aveva a disposizione sia dati di carattere geografico e scolastico (ad es. scuola frequentata, sua collocazione territoriale, voto di diploma), sia dati relativi all'esito del test. Le sedi universitarie hanno fornito i dati relativi alle carriere degli studenti del campione (crediti, voti agli esami, conseguimento del titolo accademico) nei quattro anni solari successivi al 2011. Il CISIA ha unito tutte le informazioni e le ha rese anonime e a partire da questi dati è stato possibile monitorare le carriere negli anni successivi al test per studiare la relazione tra l'esito del test TIP e la performance dello studente negli studi universitari.

È importante sottolineare che, nonostante il lavoro riguardi il TIP per l'ingegneria nell'anno 2011, l'insieme degli strumenti statistici descrittivi e predittivi definiti e sviluppati è sufficientemente generale per poter essere facilmente applicato in futuro anche ad altri test come il TOLC-I e ad altre popolazioni di studenti.

2. Il campione

Il campione, composto da 15.566 partecipanti alla prova cartacea, suddiviso per genere e per macroarea geografica in cui era situata la scuola superiore frequentata, è riportato in Tabella 1.

MACRO-AREA	N.PARTECIPANTI	F	% F REL.	M	% M REL.
CENTRO	3221	965	29,96%	2256	70,04%
ISOLE	3570	948	26,55%	2622	73,45%
NORD	3521	913	25,93%	2608	74,07%
SUD	5254	1673	31,84%	3581	68,16%
TOTALE	15566	4499	28,90%	11067	71,10%

Tabella 1 - *Distribuzione della popolazione per genere e per area geografica*

La distribuzione degli studenti del campione per scuola superiore frequentata, riportata in Tabella 2, mostra invece che i gruppi di studenti più numerosi provengono dal liceo scientifico (56,05%), dagli istituti tecnici industriali (14,8%) e dal liceo classico (9%).

CATEGORIE	N	%	N. IMM. ING.	% REL. IMM.ING.	N. NO INFO.	% REL. NO INFO.	N. IMM. AL.CDL	% REL. IMM.AL.CDL
LS	8724	56,05%	5861	67,18%	965	11,06%	1898	21,76%
LC	1401	9,00%	790	56,39%	195	13,92%	416	29,69%
AL LICEO	362	2,33%	201	55,52%	61	16,85%	100	27,62%
IT	2304	14,80%	1688	73,26%	326	14,15%	290	12,59%
GE	825	5,30%	536	64,97%	161	19,52%	128	15,52%
TC	880	5,65%	500	56,82%	177	20,11%	203	23,07%
IP	210	1,35%	131	62,38%	44	20,95%	35	16,67%
IA	131	0,84%	47	35,88%	31	23,66%	53	40,46%
AL	729	4,68%	514	70,51%	103	14,13%	112	15,36%
TOTALE	15566		10268		2063		3235	

Tabella 2 - *Distribuzione della popolazione per scuola superiore frequentata*

SIGLA	TIPOLOGIA ISTITUTI
LS	liceo scientifico
LC	liceo classico
AL_LICEO	altri licei: liceo socio-psico pedagogico, liceo linguistico, istituto magistrale
IT	istituto tecnico industriale, aeronautico, agrario, nautico
GE	istituto tecnico per geometri
TC	istituto tecnico commerciale
IP	istituti professionali
IA	liceo artistico, musicale, istituto d'arte, arti grafiche

Tabella 3 - *Legenda tipologia di scuole*

Si può notare, inoltre, che la distribuzione cambia se si esamina solo il sottoinsieme degli studenti effettivamente immatricolati a ingegneria e in particolare il rapporto percentuale tra gli studenti che si iscrivono effettivamente a un corso di laurea di ingegneria e quelli provenienti dallo

stesso tipo di scuola superiore che hanno partecipato al test. Si nota immediatamente che gli studenti degli istituti tecnici industriali raggiungono la percentuale maggiore, il 73,26%, a dimostrazione di una maggior determinazione di questi studenti verso gli studi in ingegneria rispetto a quelli provenienti da altri tipi di scuola.

La Figura 1 presenta la distribuzione dei voti ottenuti all'esame di Stato dagli studenti appartenenti al campione.

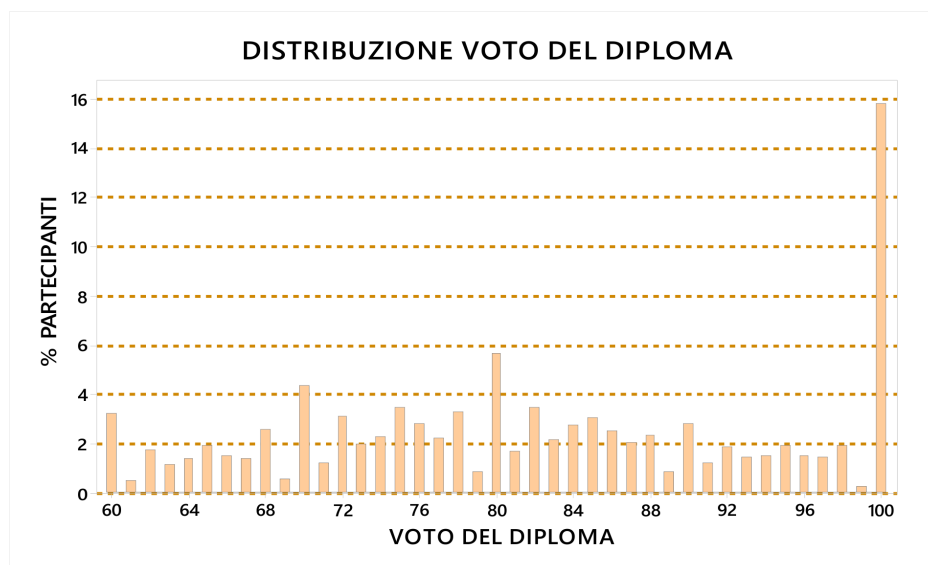


Figura 1 - Distribuzione dell'intera popolazione in base al voto dell'esame di stato.

Si può notare come il voto a più alta frequenza sia quello massimo (100/100). Tenuto conto che in Italia solo il 6% circa degli studenti si diploma con votazione 100/100, il fatto che nel campione esaminato la percentuale sia invece notevolmente più alta (il 16% dei partecipanti) induce a pensare che ingegneria sia comunemente ritenuta dagli studenti una scelta adatta ai più bravi e che si verifichi quindi un effetto auto-selettivo su coloro che decidono di partecipare al test.

3. Il test in presenza

Il test in presenza CISIA per i corsi di laurea di ingegneria (TIP) è rivolto agli studenti in ingresso ai corsi di laurea in ingegneria ed è erogato in forma cartacea.

Il TIP è costituito da quesiti suddivisi in più sezioni somministrati allo studente tramite supporto cartaceo, e il tempo concesso per rispondere ai quesiti di ciascuna sezione è prefissato.

Per ogni quesito sono proposte cinque risposte differenti, delle quali solo una è esatta. L'individuazione della risposta esatta comporta l'attribuzione di 1 punto, mentre per una risposta sbagliata è attribuito un punteggio di -1/4 di punto. A ogni quesito senza risposta è assegnato un punteggio pari a 0.

Dall'anno 2018 il TIP di ingegneria è composto, con una struttura identica al TOLC-I, da cinquanta quesiti suddivisi in quattro sezioni:

- Logica: composta da 10 quesiti, con 20 minuti per lo svolgimento.

- Matematica: contiene 20 quesiti relativi a nozioni fondamentali di matematica e a problemi con un tempo di svolgimento di 50 minuti.
- Scienze: presenta 10 quesiti di chimica e fisica con 20 minuti per lo svolgimento.
- Comprensione verbale: presenta 10 quesiti relativi a due brani tratti da testi di vario genere; tempo di svolgimento 20 minuti.

Nel 2011 la prova aveva una struttura diversa: presentava ottanta quesiti suddivisi in cinque sezioni:

- Logica: 15 quesiti, con 30 minuti per lo svolgimento.
- Comprensione verbale: 15 quesiti relativi a tre brani, con 30 minuti.
- Matematica 1: 20 quesiti relativi a nozioni fondamentali di matematica con un tempo di 30 minuti.
- Scienze fisiche e chimiche: 20 quesiti con 30 minuti per lo svolgimento.
- Matematica 2: 10 quesiti relativi alla matematica applicata e a problemi, tempo di svolgimento 30 minuti.

Questa prova nel 2011 è stata utilizzata dalla maggioranza degli atenei per la verifica delle conoscenze in ingresso e per l'attribuzione di obblighi formativi aggiuntivi (OFA), soltanto in alcuni corsi di laurea a numero locale programmato la prova è stata usata in modo selettivo.

La Figura 2 mostra la distribuzione dei punteggi test nella popolazione del campione esaminato che ha affrontato il TIP con la struttura del 2011. Come si può osservare si tratta di una distribuzione normale, caratterizzata da un valore medio pari a 20.

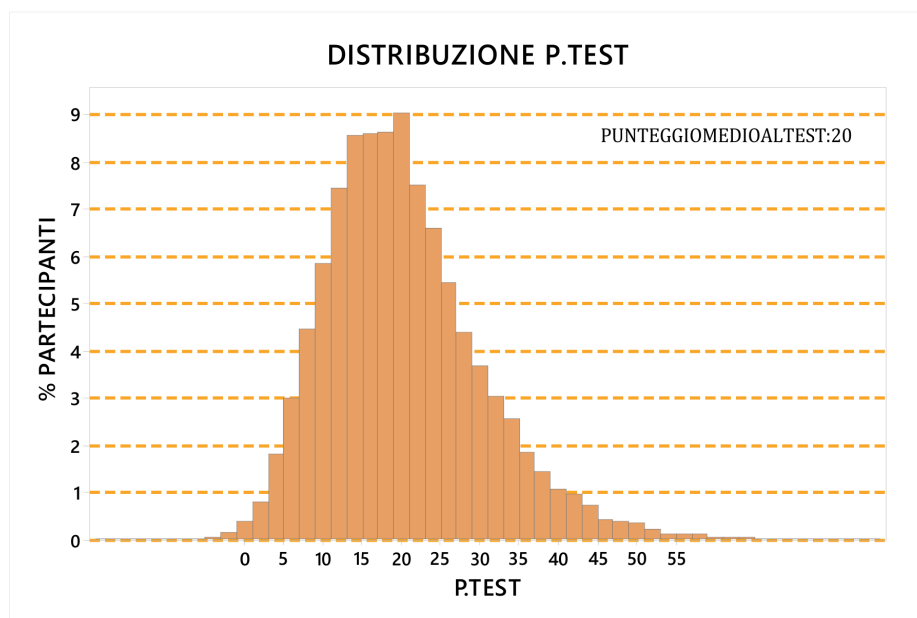


Figura 2 - Distribuzione dei punteggi test

4. Relazione tra scuola frequentata e punteggio al test

La Figura 3, mediante il formalismo grafico dei boxplot, mostra il punteggio test ottenuto dagli studenti raggruppati per tipo di scuola superiore. In particolare, in riferimento al punteggio, per ogni categoria di scuola sono riportati i valori medi, le mediane (il segmento che taglia ogni rettangolo), il primo e il terzo quartile (i 2 lati corti di ogni rettangolo), il massimo e il minimo valore. Osservando il grafico si può notare che gli studenti provenienti dal liceo scientifico ottengono i punteggi medi migliori (21,25), seguiti dagli studenti del liceo classico (19) e da quelli provenienti dagli istituti tecnici industriali (16).

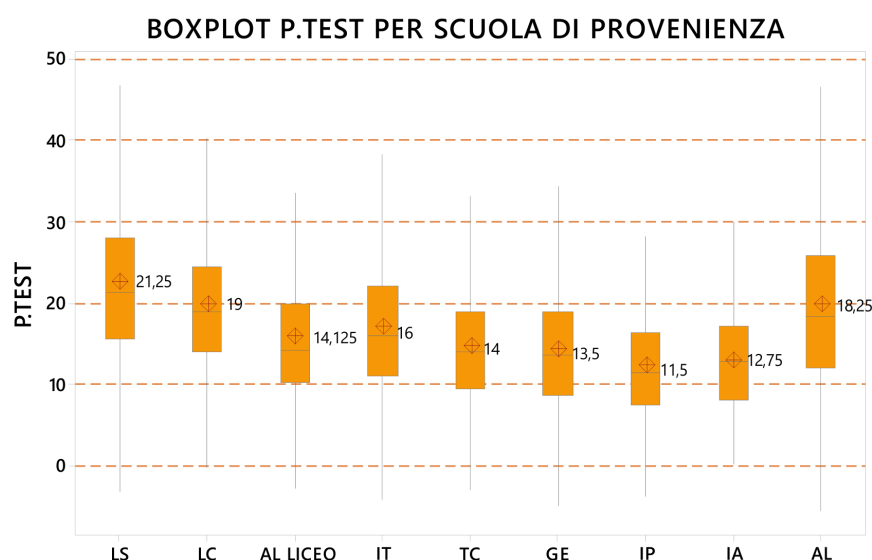


Figura 3 - Relazione tra il punteggio ottenuto nel test e la scuola di provenienza

5. Relazione tra voto di diploma e punteggio al test

Il grafico in Figura 4 presenta la distribuzione dei punteggi ottenuti al test per ogni voto di diploma. Questo diagramma evidenzia una modesta correlazione tra il voto dell'esame di stato ed il risultato del test mostrando, in particolare, che, nonostante i migliori punteggi al test siano stati ottenuti da candidati che hanno ottenuto 100 all'esame di stato, un voto alto all'esame di stato non è necessariamente garanzia di un alto punteggio al test.

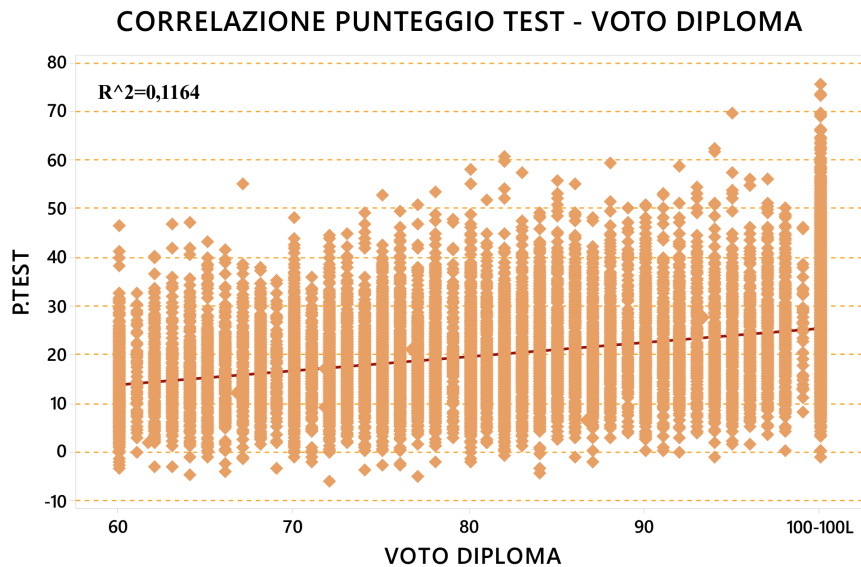


Figura 4 - Distribuzione dei punteggi test per voto di diploma

6. La progressione negli studi

Dato che l'obiettivo era quello di valutare il grado di correlazione tra esito del test e successo nel percorso di studi universitari, sono stati presi in considerazione i 10268 studenti che si sono effettivamente iscritti ad un corso di laurea in Ingegneria nella sede universitaria presso la quale hanno sostenuto il test.

Per ognuno di questi studenti, per misurare la qualità della carriera, sono stati presi in considerazione i seguenti indicatori di performance:

- il numero di CFU acquisiti nel primo anno solare successivo all'immatricolazione (cioè entro il mese di dicembre 2012);
- il tempo necessario al conseguimento della laurea;
- il voto di laurea.

Ogni indicatore è analizzato e messo in relazione con il punteggio ottenuto nel test di accesso.

CFU acquisiti e punteggio test

Il credito formativo universitario (CFU) rappresenta uno strumento di misura del carico di lavoro che un esame universitario richiede. Convenzionalmente un CFU corrisponde a 25 ore di lavoro per lo studente, che includono il tempo trascorso in laboratorio, a lezione o dedicato allo studio individuale. Per conseguire il titolo di laurea sono necessari 180 CFU; circa 60 CFU per ciascuno dei tre anni accademici in cui si articola un percorso di laurea.

La Figura 5 presenta la relazione tra il numero di CFU acquisiti nel primo anno ed il punteggio totale del test, evidenziando una marcata relazione tra le due variabili. Questo risultato mostra che

il punteggio del test esibisce una significativa valenza predittiva sulla capacità di progressione dello studente negli studi universitari.

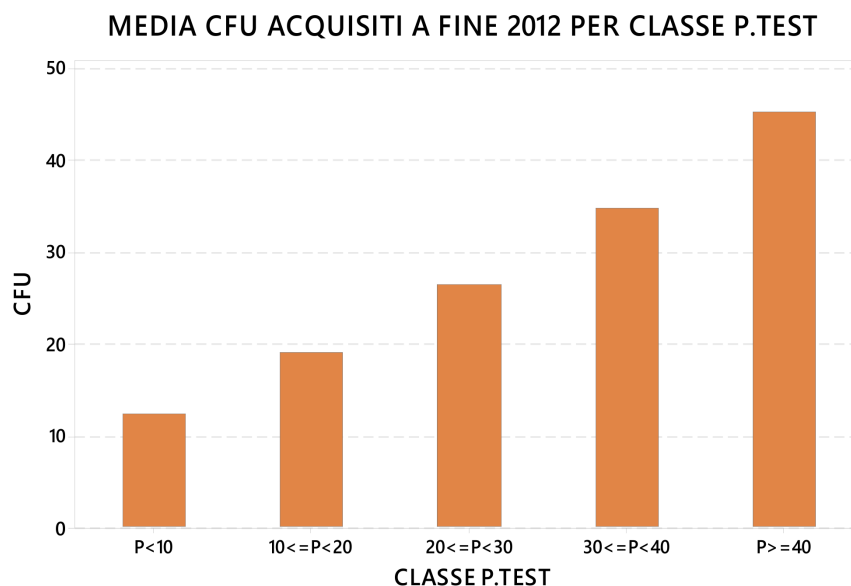


Figura 5 - *Relazione tra CFU acquisiti entro il 2012 e punteggio test*

Studenti inattivi e punteggio test

Poiché i dati indicano che un'alta percentuale dei partecipanti immatricolati non ha acquisito CFU nel primo anno di studi, è stata analizzata la relazione tra l'inattività degli studenti al primo anno e il punteggio conseguito al test.

A questo scopo, è stato assunto come studente inattivo uno studente regolarmente iscritto che, alla fine del primo anno solare successivo a quello di immatricolazione, avesse conseguito un numero di CFU inferiore a 6. Questa soglia è stata scelta per avere la sicurezza di includere nel gruppo esaminato tutti coloro che non avessero sostenuto esami, ad esclusione dell'eventuale idoneità linguistica (solitamente di 3 CFU).

Il risultato di quest'analisi è sintetizzato dal grafico in Figura 6, che riporta in ascissa le diverse classi di punteggio e in ordinata la percentuale di studenti inattivi (CFU acquisiti <6) per ogni classe. Esaminando il grafico si può facilmente constatare che al decrescere del punteggio test, cresce la percentuale di studenti inattivi.

Ciò dimostra l'esistenza di una relazione tra le 2 variabili, attribuendo perciò un elevato potenziale predittivo al punteggio test anche rispetto alla possibilità di non acquisire CFU.

Conseguimento della laurea

La carriera di ogni immatricolato si conclude con il conseguimento del titolo, che dovrebbe idealmente avvenire al termine del terzo anno di corso.

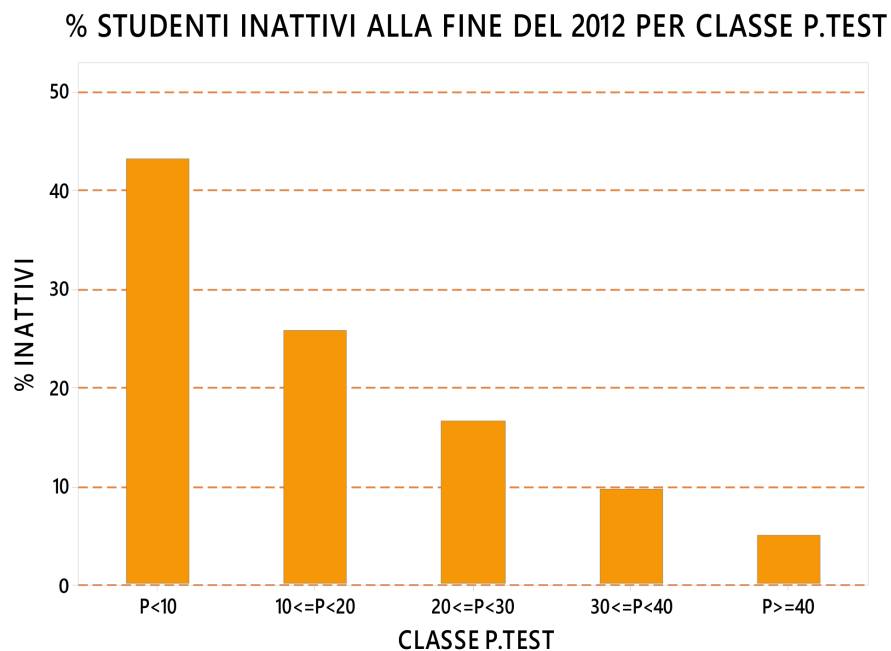


Figura 6 - Distribuzione degli studenti inattivi in base al punteggio test

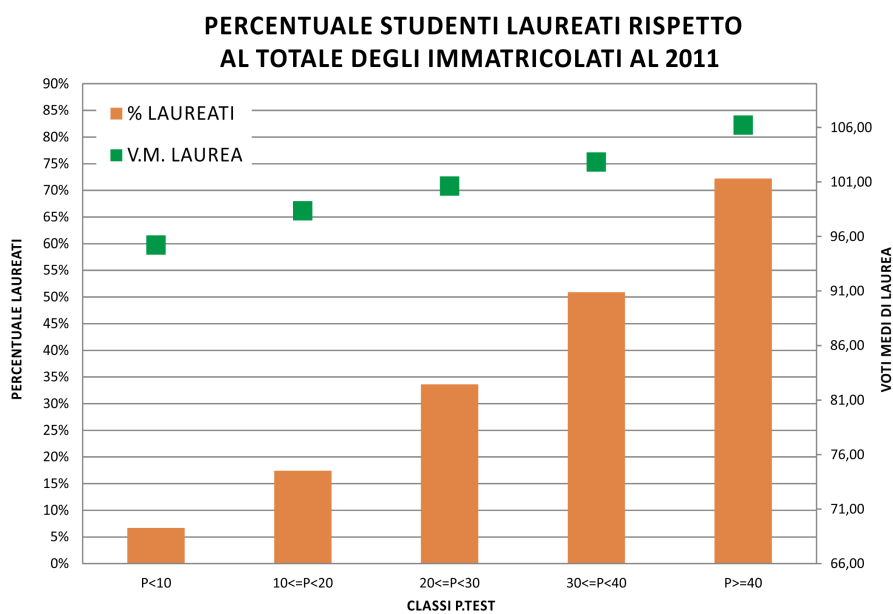


Figura 7 - Laureati entro la fine del 2015 con voti di laurea medi

Poiché esiste una notevole variabilità tra le sedi riguardo alla data di conclusione del terzo anno accademico, si è fissato come limite temporale la fine del 2015. Il numero di studenti laureati entro la fine del 2015 è risultato 2904, pari al 28,28% del totale.

Si è quindi studiata la relazione tra il numero dei laureati al 31 dicembre 2015, il voto di laurea e il punteggio test. La Figura 7 presenta i risultati di quest'analisi: per ogni classe di punteggio vengono presentati le percentuali di studenti laureati entro la fine del 2015 ed i rispettivi voti medi di laurea. Ancora una volta possiamo riscontrare come vi sia una stretta relazione tra il punteggio test ed il successo nel percorso di studi: al crescere del punteggio, cresce la percentuale dei laureati; analoga relazione è verificabile tra il voto di laurea e il punteggio test.

In conclusione possiamo affermare che dalle analisi descrittive sin qui svolte emerge in modo chiaro la valenza predittiva del punteggio del test CISIA sulla futura carriera dello studente: in tutti i casi le descrittive utilizzate hanno mostrato una significativa influenza dei risultati del test sulla qualità del percorso universitario dei partecipanti.

Parte prima

I quesiti

MATEMATICA

1. Luigi ha due figli di 15 e 11 anni. Fra 18 anni la sua età sarà uguale alla somma delle età che avranno i figli. Quanti anni ha oggi Luigi?
 - A. 30
 - B. non si può dire.
 - C. 52
 - D. 26
 - E. 44

2. Per quale dei seguenti valori di x vale $\cos(x) + \sin(x) = 0$?
 - A. $x = \frac{\pi}{4}$
 - B. $x = 0$
 - C. $x = \pi$
 - D. $x = \frac{\pi}{2}$
 - E. $x = \frac{3\pi}{4}$

3. Per $0 \leq x \leq \pi$ l'equazione $\sin(x) = 2 - k$ ha almeno una soluzione se e solo se
 - A. $k \geq 1$
 - B. $1 \leq k \leq 2$
 - C. $k \leq 2$
 - D. $-1 \leq k \leq 1$
 - E. $1 \leq k \leq 3$

4. Nell'insieme dei numeri reali la disequazione $x^4 + 5 < 0$ è verificata
 - A. sempre
 - B. se $x = -5$
 - C. mai
 - D. se $x > -5$
 - E. se $x < -\sqrt[4]{5}$

5. L'insieme delle soluzioni della disequazione $\frac{x+3}{x+1} \geq 2$ è costituito da tutti i numeri reali x tali che
- $-1 < x \leq 2$
 - $x \leq 1$
 - $x \geq 1$
 - $x < -1$
 - $-1 < x \leq 1$
6. Il resto della divisione del polinomio $x^5 - 3x^4 + 3$ per $x + 1$ è
- -1
 - 1
 - 3
 - 0
 - $x - 1$
7. Sia T un triangolo rettangolo **isoscele**. Allora la somma dei coseni degli angoli interni di T è uguale a
- 2
 - 1
 - $\sqrt{3}$
 - $1 + \sqrt{2}$
 - $\sqrt{2}$
8. Quale delle seguenti uguaglianze è verificata qualunque siano i numeri reali x e y ?
- $3^{x+y}3^{x-y} = 3^{x^2-y^2}$
 - $3^{x+y}3^{x-y} = (3^x)^2$
 - $3^{x+y}3^{x-y} = 3^{x^2} - 3^{y^2}$
 - $3^{x+y}3^{x-y} = 3^{x^2}$
 - $3^{x+y}3^{x-y} = 3^x(3^y3^{-y})$
9. Da un punto P esterno ad una circonferenza di centro O e raggio di 1 cm, si tracciano le tangenti a tale circonferenza che la incontrano nei punti A e B . L'area del poligono $PAOB$ è di $\sqrt{3}$ cm² se la distanza di P da O è
- 3 cm
 - 2 cm
 - 4 cm
 - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm
 - $\frac{3}{2}$ cm

10. L'equazione $x + \frac{1}{x} = k$, con x reale non nullo, ammette una ed una sola soluzione se
- A. $k = 1$
 - B. $k = 3$
 - C. $k = -3$
 - D. $k = -1$
 - E. $k = 2$

11. Nel piano cartesiano l'equazione

$$x^2 + y^2 + 4x = \gamma,$$

con γ numero reale positivo, è:

- A. l'equazione di una circonferenza di centro $(-2,0)$ e raggio $\sqrt{\gamma + 4}$
 - B. l'equazione di una circonferenza di centro $(0, -4)$ e raggio $\sqrt{\gamma + 2}$
 - C. l'equazione di una circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{\gamma}$
 - D. l'equazione di una circonferenza di centro $(-4,0)$ e raggio $\sqrt{\gamma + 2}$
 - E. l'equazione di una circonferenza di centro $(0, -2)$ e raggio $\sqrt{\gamma + 4}$
12. Dato un numero reale positivo x e posto $f(x) = \log_{10} x$, si ha $f(10 \cdot x^{-2}) =$
- A. $\frac{1}{f(x)}$
 - B. $2 - 2f(x)$
 - C. $1 - 2f(x)$
 - D. $\frac{1}{2f(x)}$
 - E. $-2f(x)$
13. Dal semicerchio di diametro $AB = 2$ cm e centro O si toglie il semicerchio di diametro AO . La figura così ottenuta si fa ruotare attorno ad AB con un giro di 360° . Il volume del solido ottenuto è
- A. $\frac{25}{3}\pi \text{ cm}^3$
 - B. $\frac{7}{6}\pi \text{ cm}^3$
 - C. $\frac{5}{6}\pi \text{ cm}^3$
 - D. $4\pi \text{ cm}^3$
 - E. $\frac{28}{3}\pi \text{ cm}^3$

14. Nel piano cartesiano quanti sono i punti $P(x, y)$ per cui sono verificate tutte e tre le seguenti condizioni?

$$(x + y)^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x + y \leq 0$$

- A. Uno
B. Due
C. Infiniti
D. Nessuno
E. Quattro
15. Nel piano cartesiano l'asse del segmento di estremi $A(0,0)$, $B(1, 1)$ ha equazione

- A. $y = \frac{1}{2} - x$
B. $y = 2 - x$
C. $y = 1 - \frac{x}{2}$
D. $y = 1 - x$
E. $y = \frac{1 - x}{2}$

16. Il numero $\left(\frac{81}{\sqrt{64}}\right)^{1/4}$ è uguale a

- A. $\frac{3}{\sqrt{2}}$
B. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$
C. $\frac{24}{8^{5/4}}$
D. $\frac{24}{64}$
E. $\frac{3}{2}$

17. La seguente espressione:

$$\frac{(3^{20} + 3^{20} + 3^{20})^{1/3}}{(3^3)^2}$$

vale

- A. 3^2
 - B. 1
 - C. 3
 - D. $\frac{1}{3}$
 - E. $\frac{1}{9}$
18. Sia Q un quadrato di lato ℓ , C_1 il cerchio circoscritto a Q , C_2 il cerchio inscritto in Q . Il rapporto tra l'area della superficie di C_1 e l'area della superficie di C_2 vale
- A. 4
 - B. 2
 - C. $\sqrt{2}$
 - D. varia al variare di ℓ
 - E. $2\sqrt{2}$
19. Dato il triangolo equilatero ABC il cui lato misura 2 cm, siano D , E , F i punti medi rispettivamente dei lati AB , BC , AC . L'area del rombo $DECF$ è
- A. $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$
 - B. 2 cm^2
 - C. $\sqrt{3} \text{ cm}^2$
 - D. $\sqrt{2} \text{ cm}^2$
 - E. $\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ cm}^2$
20. Il 30% degli studenti iscritti ad un corso universitario ha superato l'esame relativo al corso al primo appello. Se, dei restanti studenti iscritti, il 10% supera l'esame al secondo appello, gli studenti che devono ancora superare l'esame dopo i primi due appelli saranno:
- A. il 37% del numero totale di studenti iscritti al corso.
 - B. il 63% del numero totale di studenti iscritti al corso.
 - C. il 70% del numero totale di studenti iscritti al corso.
 - D. il 60% del numero totale di studenti iscritti al corso.
 - E. il 40% del numero totale di studenti iscritti al corso.

21. Nel piano cartesiano, il luogo dei punti di coordinate (x, y) che verificano l'equazione $(y - 2x^2)(y^2 - 4) = 0$ è:
- A. L'insieme costituito dai punti di coordinate $(1, -2), (1, 2)$
 - B. L'insieme costituito dai punti di coordinate $(1, 2), (-1, 2)$
 - C. L'unione di una parabola e di due rette
 - D. L'intersezione di un'iperbole e di due rette
 - E. L'intersezione di una parabola e di due rette
22. I numeri interi strettamente positivi a, b, c, d sono tutti differenti tra loro e sono tutti minori di 6. Sapendo che la loro somma vale 12 determinare il loro prodotto.
- A. 60
 - B. 24
 - C. 50
 - D. 40
 - E. 30
23. Quanti sono i numeri reali x che sono soluzioni dell'equazione
- $$\tan(2x - 5\pi) = -10^4$$
- A. uno
 - B. cinque
 - C. infiniti
 - D. nessuno
 - E. due
24. Un triangolo rettangolo, ruotando attorno ai propri cateti, genera due coni. Il rapporto fra i volumi dei due coni è pari al rapporto fra
- A. il cateto maggiore e l'ipotenusa
 - B. i cateti
 - C. i quadrati dei cateti
 - D. il cateto minore e l'ipotenusa
 - E. i cubi dei cateti

25. Per quale dei seguenti valori di x si ha $\sin\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{\sin(x)}{3}$

- A. $x = \frac{\pi}{3}$
- B. $x = 3\pi$
- C. $x = 2\pi$
- D. $x = \frac{\pi}{6}$
- E. $x = \frac{\pi}{2}$

26. Si considerino tutti i numeri reali a della forma

$$a = \frac{3n + 3 + (-1)^n}{n + 1}$$

dove n è un qualunque intero positivo. Quanti dei numeri a sono maggiori di 2,99?

- A. infiniti, ma non tutti
 - B. nessuno
 - C. uno
 - D. due
 - E. tutti
27. Siano dati nel piano due triangoli equilateri che si possono ruotare e traslare liberamente uno rispetto all'altro. Data una qualsiasi posizione dei due triangoli, la loro porzione di superficie sovrapposta non potrà mai essere
- A. un trapezio
 - B. un esagono
 - C. un rettangolo
 - D. un triangolo equilatero
 - E. un triangolo rettangolo
28. Sia x un numero razionale che soddisfa questa proprietà:

$$x \leq y \quad \text{per ogni } y \text{ razionale tale che } y > \sqrt{2}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- A. x è il più grande numero razionale minore di $\sqrt{2}$
- B. x è il più piccolo numero razionale maggiore di $\sqrt{2}$
- C. $x = y$
- D. $x < \sqrt{2}$
- E. $x = \sqrt{2}$

29. Date le due circonferenze rispettivamente di centro $(0, 0)$ e raggio 1 e di centro $(2, 2)$ e raggio 1, si indichi con $d(P_1, P_2)$ la distanza tra un generico punto P_1 che sta sulla prima circonferenza ed un generico punto P_2 che sta sulla seconda circonferenza. Si consideri poi il minimo m di $d(P_1, P_2)$ al variare di P_1 e di P_2 . Si ha che
- A. $m = \sqrt{2}$
 - B. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 - C. $m = \sqrt{2} - 1$
 - D. tale minimo non esiste
 - E. $m = 2(\sqrt{2} - 1)$
30. Un'azienda vinicola produce il rinomato *pirilot*, un miscuglio di bianco pinot e di rosso merlot in parti uguali. Da una bottiglia il produttore ne preleva $1/3$ e lo rimpiazza con una parte identica di solo pinot, poi preleva $1/4$ del nuovo miscuglio e lo rimpiazza ancora con una parte identica di solo pinot. Quale frazione del miscuglio finale è composta di pinot?
- A. $5/7$
 - B. $7/12$
 - C. $5/12$
 - D. $2/3$
 - E. $3/4$
31. Rispetto ad un sistema cartesiano Oxy la distanza del punto di coordinate $(-4, 2)$ dalla retta di equazione $x = 2$ è:
- A. -2
 - B. 2
 - C. -6
 - D. 6
 - E. 4
32. La scomposizione in fattori primi del numero 30^{13} è:
- A. $2^{15}3^{12}7^{13}$
 - B. $2^{13}3^{13}5^{13}$
 - C. 30^{13}
 - D. $6^{13}5^{13}$
 - E. impossibile

33. Sia a un numero reale maggiore di 1. L'espressione numerica

$$\log_a \sqrt{\frac{a^2 \sqrt{a}}{a^{\frac{5}{2}}}}$$

è uguale a:

- A. -1
 - B. a
 - C. e
 - D. 0
 - E. $+1$
34. Una squadra di operai deve asfaltare una piazza circolare. Arrivata sul posto scopre che la piazza ha diametro doppio del previsto. Quanto asfalto serve rispetto a quello preventivato?
- A. Non si può rispondere se non si conosce il raggio previsto o quello effettivo.
 - B. Una quantità π^2 volte quella prevista
 - C. Il doppio
 - D. Il quadruplo
 - E. Una quantità 2π volte quella prevista
35. Un motociclista accorto, in un suo viaggio di 600 km, fa uso anche della ruota di scorta in maniera che alla fine del viaggio le tre ruote subiscano la stessa usura. Quanti chilometri avrà percorso ogni ruota alla fine del viaggio?
- A. 350 km
 - B. 400 km
 - C. 450 km
 - D. 500 km
 - E. 200 km
36. Sia A l'insieme dei numeri interi positivi dispari o primi. Allora è vero che:
- A. $12 \in A$
 - B. $98 \in A$
 - C. $13 \notin A$
 - D. $2 \in A$
 - E. $3 \notin A$

37. Rispetto ad un piano cartesiano Oxy i punti del piano diversi dal punto $(-1,2)$ sono tutti e soli i punti (x,y) tali che:
- A. $y \neq 2$
 - B. $xy \neq -2$
 - C. $x \neq -1$
 - D. $x \neq -1$ oppure $y \neq 2$
 - E. $x \neq -1$ e $y \neq 2$
38. Rispetto ad un piano cartesiano Oxy l'equazione dell'asse del segmento di estremi $(0,0)$ e $(2,2)$ è:
- A. $x - y = 2$
 - B. $x = 1$
 - C. $y = x$
 - D. $x + y = 2$
 - E. $y = 1$
39. Se a e b sono numeri reali tali che $a^2 + b^2 = 0$ allora si può concludere che certamente è:
- A. $a > b$
 - B. $ab < -1$
 - C. $a + b = 1$
 - D. $a + b = 0$
 - E. $ab > 0$
40. La disequazione $\cos x + \sin x \geq \sqrt{2}$ è verificata nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$ per:
- A. ogni x
 - B. $x = -\frac{\pi}{4}$
 - C. almeno un x tale che $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
 - D. $x = \frac{\pi}{4}$
 - E. nessun x
41. Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy , è data la circonferenza di equazione $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}y^2 - 2x - 2y = 0$. Allora il suo raggio è:
- A. $\sqrt{\frac{2}{3}}$
 - B. 3
 - C. $\sqrt{3}$
 - D. 1
 - E. 2

42. In un parallelogramma di perimetro $2p$ si ha che :
- A. almeno una diagonale ha lunghezza pari a p
 - B. ogni diagonale ha lunghezza minore di p
 - C. ogni diagonale ha lunghezza maggiore di p
 - D. la somma delle lunghezze delle diagonali è minore di p
 - E. una diagonale ha lunghezza maggiore di p , l'altra minore di p
43. Dato un esagono regolare di lato L , l'area del rettangolo che ha due lati coincidenti con due lati paralleli dell'esagono è uguale a:
- A. $2\sqrt{2}L$
 - B. $\sqrt{3}L^2$
 - C. quella del cerchio circoscritto all'esagono
 - D. $2L^2$
 - E. quella del cerchio inscritto all'esagono
44. L'equazione
- $$\sqrt{x^2} - x = 0$$
- è verificata
- A. solo per $x = -1$
 - B. solo per $x \geq 0$
 - C. solo per $x = 0$
 - D. solo per $x = 1$
 - E. $\forall x \in \mathbb{R}$
45. Un numero razionale compreso tra $\sqrt{5}$ e $\sqrt{8}$ è:
- A. 2,52
 - B. 1,98
 - C. 3,01
 - D. $(\sqrt{5})(\sqrt{8})/2$
 - E. $(\sqrt{5} + \sqrt{8})/2$

46. L'espressione

$$\left(\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}\right)^2$$

è anche uguale a:

- A. $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$
 - B. $\frac{3}{2}$
 - C. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
 - D. $\frac{1}{2}$
 - E. 1
47. Una sfera è inscritta in un cubo; il rapporto tra il volume della sfera e quello del cubo è:
- A. $\frac{\pi}{4}$
 - B. $\frac{\pi}{6}$
 - C. $\frac{2\pi}{3}$
 - D. $\frac{4\pi}{3}$
 - E. $\frac{\pi}{2}$
48. Un triangolo equilatero è inscritto in una circonferenza; il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il perimetro del triangolo è:
- A. $\frac{4\pi}{3}$
 - B. $\frac{\pi}{3}$
 - C. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$
 - D. $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$
 - E. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$
49. L'equazione in campo reale $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ ha:
- A. due soluzioni positive e nessuna soluzione negativa
 - B. nessuna soluzione
 - C. una soluzione positiva e una negativa
 - D. due soluzioni negative e nessuna soluzione positiva
 - E. due soluzioni positive e due soluzioni negative

50. L'equazione $x^2 - 3|x| + 2 = 0$ ha:
- A. quattro soluzioni
 - B. tre soluzioni
 - C. due soluzioni
 - D. una sola soluzione
 - E. nessuna soluzione
51. L'equazione $\cos^2 x - \cos x - 2 \geq 0$ è verificata per:
- A. nessun valore reale di x
 - B. $x = \pi + 2k\pi$ per ogni k intero
 - C. $x = 2k\pi$ per ogni k intero
 - D. qualunque valore reale di x
 - E. $x = 3k\pi$ per ogni k intero
52. Un foglio di carta di forma quadrata viene piegato in due parti uguali in modo da formare due rettangoli sovrapposti. Sapendo che il perimetro del rettangolo è di 12 cm, qual è l'area del quadrato originario?
- A. 9 cm^2
 - B. 36 cm^2
 - C. 24 cm^2
 - D. 72 cm^2
 - E. 16 cm^2
53. Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy , consideriamo i punti $A = (1,0)$ e $B = (0,2)$. Per quale scelta del punto C il triangolo ABC **non** è rettangolo?
- A. $C = (0, -1/2)$
 - B. $C = (-1,0)$
 - C. $C = (1,2)$
 - D. $C = (-4,0)$
 - E. $C = (0,0)$
54. L'equazione $|x - 1| = 1 - |x|$ ha
- A. esattamente due soluzioni
 - B. esattamente tre soluzioni
 - C. esattamente quattro soluzioni
 - D. infinite soluzioni
 - E. nessuna soluzione

55. Per quali x reali è verificata la disequazione $\sqrt{x^2 - 1} > 2x$?
- A. $x \geq -1$
 - B. $x \leq -1$
 - C. $-1 < x < 1$
 - D. per nessun x reale
 - E. $x \geq 1$
56. Aldo, Bea, Carlo, Dario, Ebe, Franco vanno in treno e trovano uno scompartimento a sei posti libero. Considerando che Aldo e Bea devono stare vicino al finestrino, quanti modi diversi hanno i sei amici di disporsi nello scompartimento?
- A. 48
 - B. 4
 - C. 240
 - D. 8
 - E. 10
57. In un paese in cui ogni cittadino è tenuto a pagare in tasse il 25% del proprio reddito, un anno l'aliquota viene abbassata al 20%. Viene però contestualmente introdotta una tassa "una tantum" di 1000 € che ogni contribuente è tenuto a pagare. Si può dire che in quello stesso anno, in rapporto a questa operazione:
- A. i cittadini con un reddito superiore a 25 000 € hanno dovuto pagare un importo maggiorato di un quinto rispetto a quello che avrebbero dovuto pagare secondo le norme dell'anno precedente
 - B. il peso fiscale è rimasto invariato per tutti
 - C. solo i cittadini con un reddito superiore a 10 000 € sono stati avvantaggiati
 - D. i cittadini con un reddito superiore a 25 000 € sono stati avvantaggiati
 - E. solo i cittadini con un reddito inferiore a 20 000 € sono stati avvantaggiati
58. Rispetto ad un riferimento cartesiano ortogonale Oxy del piano, l'equazione

$$(x - 1)^2 - y^2 = 0$$

individua:

- A. due rette incidenti
- B. una parabola
- C. due soli punti
- D. una circonferenza
- E. due rette parallele

59. Una quantità di liquido che riempie una sfera di raggio K viene travasata in cilindri aventi diametro di base K ed altezza K . Qual è il numero minimo di cilindri che occorrono per compiere questa operazione?
- A. 5
 - B. 6
 - C. 3
 - D. 9
 - E. 4
60. In un gruppo di 100 persone 51 parlano inglese, 36 francese, delle quali 12 sia inglese che francese. Quante di loro non parlano né inglese né francese?
- A. 49
 - B. 15
 - C. 29
 - D. 13
 - E. 25
61. In un piano cartesiano, quale delle seguenti rette è parallela alla retta passante per i punti di coordinate $(1, 0)$ e $(0, 1)$?
- A. $2x + 3y = 0$
 - B. $x = y - 1$
 - C. $x = 2$
 - D. $x + y = 3$
 - E. $y = 1$
62. In un piano cartesiano, quale dei seguenti punti è interno al triangolo racchiuso tra le tre rette $r_1 : y = 0$, $r_2 : y = 2x$, $r_3 : y = -x + 7$?
- A. $P = (3, 5)$
 - B. $P = (4, 4)$
 - C. $P = (1, -3)$
 - D. $P = (3, 3)$
 - E. $P = (-3, 2)$

63. A parità di tutte le altre condizioni (materiale, rugosità, stato di pulizia, ecc.) serve meno quantità di pittura per tinteggiare:
- A. un cono (circolare retto) di altezza 1 metro e base di raggio 1 metro
 - B. una sfera di raggio 1 metro
 - C. un cubo di lato 1 m
 - D. una piramide avente tutte le facce che sono triangoli equilateri (tetraedro) di lato 1 metro
 - E. un cilindro (circolare retto) di raggio 1 metro e di altezza 1 metro
64. Si ha $\sqrt[3]{x^3 + 8} < 0$
- A. se e solo se $x < -1$
 - B. per nessun valore reale di x
 - C. se e solo se $x < -2$
 - D. se e solo se $x < 0$
 - E. se e solo se $x < 1$
65. Avendo un triangolo equilatero A di lato a ed un triangolo equilatero B di lato $2a$ si ha che la superficie di B risulta:
- A. maggiore di quella di A ma comunque minore di quella del doppio di A
 - B. quadrupla di quella di A
 - C. maggiore del quadruplo di quella di A
 - D. doppia di quella di A
 - E. non deducibile da quella di A
66. Un angolo misura 2 radianti, quindi
- A. il suo seno è positivo
 - B. il suo seno e il suo coseno hanno lo stesso segno
 - C. l'angolo è acuto
 - D. la sua tangente non esiste
 - E. il suo coseno è positivo
67. La somma degli angoli interni di un esagono non regolare
- A. è uguale a cinque angoli piatti
 - B. non è calcolabile senza ulteriori dati
 - C. è uguale a 4π radianti
 - D. è uguale a 360 gradi
 - E. è uguale a 6 angoli retti

68. Dato un numero reale x , la seguente relazione $\frac{2^x \cdot 2}{\sqrt{4^{x+1}}}$ vale:
- $\frac{1}{2^x}$
 - 0
 - $\frac{1}{2}$
 - 2
 - 1
69. In un piano cartesiano, la circonferenza di centro C di coordinate (1,1) e tangente all'asse delle x ha equazione
- $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$
 - $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$
 - $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$
 - $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 1$
70. Dato un qualunque numero reale positivo x , allora $\log(x^3) - \log(x^2)$ è uguale a
- $\log(x^5)$
 - $\frac{\log(x^3)}{\log(x^2)}$
 - $\log(x)$
 - 0
 - $\log(x^3 - x^2)$
71. Il polinomio $12a^2 - 18b^2$ è divisibile per
- $\sqrt{6}(a - b)$
 - $\sqrt{2}a - \sqrt{3}b$
 - $12a + 18b$
 - $12a - 18b$
 - $a - b$
72. Le soluzioni dell'equazione trigonometrica

$$\sin x = \frac{1}{\sin x}$$

sono

- $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, per ogni valore intero di k
- nessuna delle altre risposte
- $x = \frac{k\pi}{2}$, per ogni valore intero di k
- $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, per ogni valore intero di k
- $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, per ogni valore intero di k

73. Mettere in ordine crescente i tre numeri 7 , $\sqrt{47}$, $\sqrt{3} + \sqrt{27}$
- $\sqrt{3} + \sqrt{27} < \sqrt{47} < 7$
 - $\sqrt{47} < \sqrt{3} + \sqrt{27} < 7$
 - $7 < \sqrt{47} < \sqrt{3} + \sqrt{27}$
 - $7 < \sqrt{3} + \sqrt{27} < \sqrt{47}$
 - $\sqrt{47} < 7 < \sqrt{3} + \sqrt{27}$
74. Sia γ una circonferenza e sia P un punto del piano interno a γ , diverso dal centro. Quante sono le circonferenze di centro P tangenti a γ ?
- 4
 - 0
 - 1
 - 2
 - 3
75. Se $f(x) = x^2 - x^3$ allora $f(x - 2)$ vale
- $x^2 - x^3 + 2$
 - $(3 - x)(x - 2)^2$
 - nessuna delle altre risposte
 - $x^2 - x^3 - 2$
 - $x^2 - 2 - x^3 + 2$
76. L'espressione
- $$\log_{10} \sqrt[3]{x^2 + 1} \cdot \log_{10} 1000$$
- vale
- $\log_{10} \frac{1000(x^2+1)}{3}$
 - $\log_{10}(x^2 + 1)$
 - $\log_{10} \sqrt[3]{x^2 + 1} + \log_{10} 1000$
 - $\frac{1}{3} \log_{10}[1000(x^2 + 1)]$
 - $\log_{10}(1000 \sqrt[3]{x^2 + 1})$
77. Il Circolo Canottieri Santerno è formato da sei rematori tutti ugualmente bravi e affiatati fra loro. Deve mandare una rappresentanza di quattro atleti al campionato regionale. In quanti modi diversi può essere formata una tale rappresentanza?
- 720
 - 5
 - 15
 - 4
 - 6

78. Per $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, l'equazione $\sqrt{3} \sin^2 x + \sqrt{3} \cos^2 x - 2 \sin x = 0$ ha soluzione
- A. $x = \frac{\pi}{3}$
 - B. $x = \frac{\pi}{6}$
 - C. $x = \frac{\pi}{4}$
 - D. $x = 0$
 - E. $x = \frac{\pi}{2}$
79. Date due sfere concentriche di raggio 1 e r (con $r < 1$) che valore deve assumere r affinché il volume della parte esterna alla sfera minore sia metà del volume della sfera maggiore?
- A. $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 - B. $r = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$
 - C. $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
 - D. $r = \frac{1}{2}$
 - E. $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$
80. Quale delle seguenti affermazioni vale per ogni coppia di polinomi $p(x)$ e $q(x)$ di grado 3 a coefficienti reali, con $p(x) \neq q(x)$?
- A. $p(x) + q(x)$ ha grado 6 e $p(x) \cdot q(x)$ ha grado ≤ 6
 - B. $p(x) + q(x)$ ha grado 3 e $p(x) \cdot q(x)$ ha grado 3
 - C. $p(x) + q(x)$ ha grado 6 e $p(x) \cdot q(x)$ ha grado ≤ 9
 - D. $p(x) + q(x)$ ha grado 3 e $p(x) \cdot q(x)$ ha grado ≤ 6
 - E. $p(x) + q(x)$ ha grado ≤ 3 e $p(x) \cdot q(x)$ ha grado 6
81. L'equazione $x(x - a) = 1$ ha due soluzioni distinte
- A. se e solo se $a \geq 0$
 - B. se e solo se $-1 < a < 1$
 - C. per nessun valore reale di a
 - D. per tutti gli a reali
 - E. se e solo se $-2 < a < 2$
82. L'equazione $\sin x = -x$
- A. ammette infinite soluzioni
 - B. se $h > 0$ è una soluzione, allora anche $x = h + \pi$ lo è
 - C. non ammette soluzioni
 - D. ammette soltanto una soluzione
 - E. ammette esattamente due soluzioni

83. Nel salvadanaio di Geremia ci sono monete da 1 € e da 2 €, per un totale di 60 €. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
- A. Se il salvadanaio contiene almeno 30 monete, allora la maggior parte di queste sono da 2 €
 - B. Il numero di monete da 1 € non può essere uguale al numero di monete da 2 €
 - C. Se il salvadanaio contiene meno di 40 monete, allora la maggior parte di queste sono da 2 €
 - D. Il numero di monete da 1 € è sicuramente minore del numero di monete da 2 €
 - E. Il numero di monete da 1 € è sicuramente maggiore del numero di monete da 2 €
84. Il resto della divisione del polinomio $2x^3 - 3x + 2$ per $x - 2$ è:
- A. 8
 - B. -1
 - C. 12
 - D. -8
 - E. -12
85. In un piano cartesiano consideriamo le rette r_k di equazione
- $$y = kx + 2k + 1$$
- dove k è un parametro reale. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
- A. Le rette r_k sono a due a due incidenti, ma non esiste un punto comune a tutte
 - B. Per $k = 0$ non si ottiene l'equazione di una retta
 - C. Tutte le rette r_k passano per il punto $(1, -2)$
 - D. Tutte le rette r_k passano per il punto $(-2, 1)$
 - E. Le rette r_k sono parallele fra di loro
86. L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, \frac{y}{x} > 2\}$ è costituito da
- A. una delle parti di piano delimitate da una iperbole
 - B. una corona circolare
 - C. due angoli opposti al vertice
 - D. un semipiano
 - E. due semipiani

87. Sia p un numero positivo dispari e q il numero dispari successivo. Si ha che

- A. $q^2 - p^2$ è divisibile per 16 e può non essere divisibile per 32
- B. $q^2 - p^2$ può essere dispari
- C. $q^2 - p^2$ è divisibile per 2 e può non essere divisibile per 4
- D. $q^2 - p^2$ è divisibile per 4 e può non essere divisibile per 8
- E. $q^2 - p^2$ è divisibile per 8 e può non essere divisibile per 16

88. L'espressione

$$\log(x^4 + 2x^2 + \sin^2 x + \cos^2 x)$$

coincide con

- A. $4 \log(1 + x)$
- B. $[\log(1 + x^2)]^2$
- C. $2 \log(1 + x^2)$
- D. $\log(x^4 + 2x^2) + \log(\sin^2 x + \cos^2 x)$
- E. $2 \log(1 + x + \sin x + \cos x)$

89. Un rettangolo è formato da due quadrati il cui lato misura 2 cm e da sette quadrati il cui lato misura 1 cm. Il perimetro del rettangolo misura:

- A. 22 cm
- B. 18 cm
- C. 24 cm
- D. 20 cm
- E. 16 cm

90. Dato n numero intero positivo, sia x_n la soluzione dell'equazione

$$\frac{x+1}{1} + \frac{x+2}{2} + \cdots + \frac{x+n}{n} = n$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- A. $x_n \neq 0$ per ogni n
- B. se $n_1 < n_2$ allora $x_{n_1} < x_{n_2}$
- C. se $n_1 < n_2$ allora $x_{n_1} > x_{n_2}$
- D. $x_n = x_{n+1} + 1$ per ogni n
- E. $x_n = x_{n+1}$ per ogni n

Parte seconda

I quesiti commentati

Premessa

In questa parte sono riportati nuovamente i quesiti proposti ma, a differenza di quanto fatto in precedenza, ogni quesito è ora accompagnato da un breve commento.

Ogni sezione tematica del test è preceduta da una introduzione che ne illustra in maniera sintetica le caratteristiche generali. Dopo l'introduzione vengono riportati i quesiti della sezione; per ognuno, per facilitarne la consultazione, viene di nuovo presentata la formulazione originale, e quindi viene dato un commento più o meno esteso e spiegato perché una certa risposta è quella esatta. Una lettura attenta dei commenti è dunque caldamente raccomandata. Se ne possono trarre indicazioni metodologiche utili per affrontare il tipo di quesiti caratteristici del test.

Infine, a chiusura del quesito, vengono forniti in forma percentuale i dati statistici che lo caratterizzano. In particolare, quanti studenti hanno percentualmente dato risposte corrette o errate o non hanno dato alcuna risposta e per ognuna delle cinque risposte offerte, viene data la percentuale di studenti che l'hanno indicata come risposta esatta. Questi dati indicano ovviamente il grado di difficoltà presentata dal quesito e mostrano come gli errori commessi si siano distribuiti tra le risposte non corrette ed eventualmente quale errore sia il più frequente, tutte informazioni di indubbio interesse per avere indicazioni sulla propria preparazione.

MATEMATICA

Introduzione alla Matematica

In questa sezione di Matematica, dedicata prevalentemente all'accertamento delle conoscenze acquisite, si descriveranno i metodi per cercare la soluzione ai quesiti ricorrendo, all'occorrenza, all'uso delle formule più semplici, formule che dovrebbero costituire il bagaglio di ciascun studente delle scuole superiori.

Non verranno commentate tutte le risposte, ma si commenterà solo la risposta giusta con le formule eventualmente necessarie per spiegarne la correttezza. È chiaro, data la natura della matematica, che le risposte sbagliate non usano le formule giuste o non le usano affatto.

Commenti e soluzioni a cura di Gioconda Moscariello, Antonia Passarelli, Gabriella Zecca e Vincenzo Ferone

1. Luigi ha due figli di 15 e 11 anni. Fra 18 anni la sua età sarà uguale alla somma delle età che avranno i figli. Quanti anni ha oggi Luigi?
- A. 30
 - B. non si può dire.
 - C. 52
 - D. 26
 - E. 44

Soluzione

La risposta E è giusta. Fra 18 anni la somma delle età dei due figli di Luigi sarà pari a $(15 + 18) + (11 + 18) = 62$ anni. Poichè questa sarà anche l'età di Luigi fra 18 anni, la sua età attuale deve essere uguale a $62 - 18 = 44$ anni. ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 1

Risposta A:	0.49%	Risposte giuste:	84.22%
Risposta B:	2.68%	Risposte errate:	11.37%
Risposta C:	3.48%	Risposte non date:	4.41%
Risposta D:	4.71%		
Risposta E:	84.22%		

2. Per quale dei seguenti valori di x vale $\cos(x) + \sin(x) = 0$?

- A. $x = \frac{\pi}{4}$
- B. $x = 0$
- C. $x = \pi$
- D. $x = \frac{\pi}{2}$
- E. $x = \frac{3\pi}{4}$

Soluzione

La risposta E è giusta. Se vale l'uguaglianza $\cos(x) + \sin(x) = 0$, sarà $\cos x \neq 0$, altrimenti dovrebbe essere anche $\sin(x) = 0$, mentre invece queste due uguaglianze non possono valere contemporaneamente per uno stesso valore di x . Perciò possiamo dividere per $\cos(x)$ così che l'uguaglianza proposta è equivalente a $1 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0$ ovvero a $\tan(x) = -1$. ✓

Fra i valori di x indicati, solo $\frac{3\pi}{4}$ verifica tale uguaglianza. Infatti, la tangente in $\frac{\pi}{4}$ vale 1, in 0 ed in π vale 0, in $\frac{\pi}{2}$ non esiste.

Risultati percentuali relativi al quesito 2

Risposta A:	9.53%	Risposte giuste:	50.54%
Risposta B:	6.01%	Risposte errate:	23.73%
Risposta C:	3.94%	Risposte non date:	25.73%
Risposta D:	4.25%		
Risposta E:	50.54%		

3. Per $0 \leq x \leq \pi$ l'equazione $\sin(x) = 2 - k$ ha almeno una soluzione se e solo se

- A. $k \geq 1$
- B. $1 \leq k \leq 2$
- C. $k \leq 2$
- D. $-1 \leq k \leq 1$
- E. $1 \leq k \leq 3$

Soluzione

La risposta B è giusta. Per $0 \leq x \leq \pi$ si ha che $0 \leq \sin x \leq 1$. Dunque l'equazione proposta ha almeno una soluzione se e solo se $0 \leq 2 - k \leq 1$, cioè, passando ai valori opposti, se e solo se $-1 \leq k - 2 \leq 0$, cioè ancora, aggiungendo 2 ad ambo i membri, se e solo se $1 \leq k \leq 2$. ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 3

Risposta A:	4.83%	Risposte giuste:	28.07%
Risposta B:	28.07%	Risposte errate:	31.25%
Risposta C:	6.44%	Risposte non date:	40.68%
Risposta D:	4.80%		
Risposta E:	15.19%		

4. Nell'insieme dei numeri reali la disequazione $x^4 + 5 < 0$ è verificata

- A. sempre
- B. se $x = -5$
- C. mai
- D. se $x > -5$
- E. se $x < -\sqrt[4]{5}$

Soluzione

La risposta C è giusta. Poichè l'esponente 4 è un numero pari, per ogni x reale si ha $x^4 \geq 0$ e dunque $x^4 + 5 \geq 5 > 0$. Ciò esclude che per qualche x reale possa aversi $x^4 + 5 < 0$:. ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 4

Risposta A:	4.42%	Risposte giuste:	72.72%
Risposta B:	1.07%	Risposte errate:	17.41%
Risposta C:	72.72%	Risposte non date:	9.87%
Risposta D:	1.37%		
Risposta E:	10.55%		

5. L'insieme delle soluzioni della disequazione $\frac{x+3}{x+1} \geq 2$ è costituito da tutti i numeri reali x tali che

- A. $-1 < x \leq 2$
- B. $x \leq 1$
- C. $x \geq 1$
- D. $x < -1$
- E. $-1 < x \leq 1$

Soluzione

La risposta E è giusta. Osserviamo preliminarmente che la disequazione ha senso per $x \neq -1$, ✓
poiché per $x = -1$ la quantità $(x+1)$ a denominatore si annulla.

Sottraendo 2 ad ambo i membri della disuguaglianza proposta risulta

$$0 = 2 - 2 \leq \frac{x+3}{x+1} - 2 = \frac{x+3-2(x+1)}{x+1} = \frac{x+3-2x-2}{x+1}$$

Pertanto la disequazione assegnata equivale a

$$\frac{1-x}{x+1} \geq 0. \quad (1)$$

Poiché per la *regola dei segni* il rapporto di due quantità è positivo se e solo se le due quantità hanno lo stesso segno, la (1) è soddisfatta se e solo se x soddisfa uno dei due sistemi:

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1+x > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 1-x \leq 0 \\ 1+x < 0. \end{cases}$$

Il primo di questi ha per soluzioni le x tali che $-1 < x \leq 1$; il secondo non ha soluzioni.

Risultati percentuali relativi al quesito 5

Risposta A:	6.14%	Risposte giuste:	50.44%
Risposta B:	9.06%	Risposte errate:	33.86%
Risposta C:	15.53%	Risposte non date:	15.70%
Risposta D:	3.13%		
Risposta E:	50.44%		

6. Il resto della divisione del polinomio $x^5 - 3x^4 + 3$ per $x + 1$ è
- A. -1
 - B. 1
 - C. 3
 - D. 0
 - E. $x - 1$

Soluzione

La risposta A è giusta. Quando si divide un polinomio generico $P(x)$ per un polinomio della forma $x - \alpha$, che ha grado 1, il resto sarà un polinomio di grado minore di 1, cioè 0, dunque una costante R . ✓

Se $Q(x)$ è il polinomio quoziente, si avrà allora per definizione:

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R.$$

Ponendo $x = \alpha$ in quest'ultima relazione, si ricava $R = P(\alpha)$. Da ciò segue che, il resto della divisione proposta si ottiene valutando il polinomio $x^5 - 3x^4 + 3$ in $x = -1$ e precisamente:

$$R = (x^5 - 3x^4 + 3)|_{x=-1} = (-1)^5 - 3(-1)^4 + 3 = -1$$

Risultati percentuali relativi al quesito 6

Risposta A:	28.42%	Risposte giuste:	28.42%
Risposta B:	6.72%	Risposte errate:	20.93%
Risposta C:	7.53%	Risposte non date:	50.65%
Risposta D:	3.24%		
Risposta E:	3.44%		

7. Sia T un triangolo rettangolo **isoscele**. Allora la somma dei coseni degli angoli interni di T è uguale a
- A. 2
 - B. 1
 - C. $\sqrt{3}$
 - D. $1 + \sqrt{2}$
 - E. $\sqrt{2}$

Soluzione

La risposta E è giusta. ✓

Diciamo α l'angolo al vertice e β e γ gli angoli alla base di T . Poichè T è un triangolo rettangolo isoscele risulterà $\alpha = 90^\circ$ e $\beta = \gamma$. Inoltre, in ogni triangolo la somma degli angoli interni è pari

ad un angolo piatto; perciò risulta $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Dunque $\beta = \gamma = 45^\circ$. Poiché $\cos 90^\circ = 0$ e $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, la somma richiesta vale $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Risultati percentuali relativi al quesito 7

Risposta A:	4.30%	Risposte giuste:	31.49%
Risposta B:	12.44%	Risposte errate:	28.01%
Risposta C:	4.61%	Risposte non date:	40.50%
Risposta D:	6.66%		
Risposta E:	31.49%		

8. Quale delle seguenti uguaglianze è verificata qualunque siano i numeri reali x e y ?

- A. $3^{x+y}3^{x-y} = 3^{x^2-y^2}$
- B. $3^{x+y}3^{x-y} = (3^x)^2$
- C. $3^{x+y}3^{x-y} = 3^{x^2} - 3^{y^2}$
- D. $3^{x+y}3^{x-y} = 3^{x^2}$
- E. $3^{x+y}3^{x-y} = 3^x(3^y3^{-y})$

Soluzione

La risposta B è giusta.

Il prodotto di due potenze aventi la stessa base è uguale alla potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti dei due fattori. Vale cioè la formula $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$, qualunque siano i numeri reali α e β e qualunque sia $a > 0$ reale. La potenza di una potenza è uguale alla potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti: $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$. Il primo membro delle uguaglianze proposte è il prodotto di due potenze aventi la stessa base e pertanto è

$$3^{x+y}3^{x-y} = 3^{x+y+x-y} = 3^{2x}.$$

D'altra parte, quest'ultima espressione si può scrivere come potenza di una potenza: $3^{2x} = (3^x)^2$.

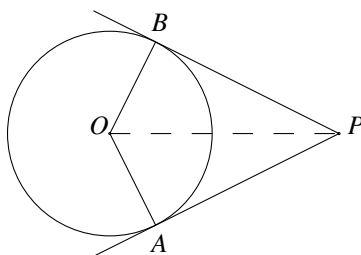
Risultati percentuali relativi al quesito 8

Risposta A:	21.33%	Risposte giuste:	25.58%
Risposta B:	25.58%	Risposte errate:	44.50%
Risposta C:	3.49%	Risposte non date:	29.92%
Risposta D:	11.28%		
Risposta E:	8.39%		

9. Da un punto P esterno ad una circonferenza di centro O e raggio di 1 cm, si tracciano le tangenti a tale circonferenza che la incontrano nei punti A e B . L'area del poligono $PAOB$ è di $\sqrt{3} \text{ cm}^2$ se la distanza di P da O è
- A. 3 cm
 - B. 2 cm
 - C. 4 cm
 - D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm
 - E. $\frac{3}{2}$ cm

Soluzione

La risposta B è giusta. Il poligono $PAOB$ è diviso dalla diagonale OP in due triangoli, rettangoli l'uno in A , l'altro in B (perché raggio e tangente sono perpendicolari l'uno all'altra) ed uguali tra loro (poiché hanno i cateti OA , OB uguali e l'ipotenusa OP in comune). ✓



Allora, detta A_1 l'area del poligono $PAOB$ e A_2 l'area del triangolo PAO ,

$$A_1 = 2A_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{AP}.$$

Poiché sappiamo che $A_1 = \sqrt{3} \text{ cm}^2$ e che $\overline{OA} = 1 \text{ cm}$, deduciamo che $\overline{AP} = \sqrt{3} \text{ cm}$. Allora, per il teorema di Pitagora abbiamo

$$\overline{OP} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AP}^2} = \sqrt{1 \text{ cm}^2 + 3 \text{ cm}^2} = 2 \text{ cm}.$$

Risultati percentuali relativi al quesito 9

Risposta A:	2.45%	Risposte giuste:	12.40%
Risposta B:	12.40%	Risposte errate:	15.80%
Risposta C:	1.33%	Risposte non date:	71.80%
Risposta D:	9.16%		
Risposta E:	2.86%		

10. L'equazione $x + \frac{1}{x} = k$, con x reale non nullo, ammette una ed una sola soluzione se
- A. $k = 1$
 - B. $k = 3$
 - C. $k = -3$
 - D. $k = -1$
 - E. $k = 2$

Soluzione

La risposta E è giusta. Sottraendo k ad entrambi i membri dell'equazione proposta si ottiene



$$x + \frac{1}{x} - k = k - k = 0.$$

Perciò le soluzioni dell'equazione data sono tutte e sole le soluzioni di

$$\frac{x^2 + 1 - kx}{x} = 0.$$

Osservando che il rapporto di due polinomi è nullo se e solo se il polinomio al numeratore è nullo (e quello al denominatore è non nullo), quest'ultima uguaglianza equivale a richiedere

$$x^2 - kx + 1 = 0. \quad (2)$$

Ricordiamo ora che un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a \neq 0$) ammette una e una sola soluzione se e solo se il discriminante dell'equazione $\Delta = b^2 - 4ac$ è nullo. Pertanto, poiché l'equazione (2) è un'equazione di secondo grado con discriminante $\Delta = k^2 - 4$, questa ammetterà una ed una sola soluzione se $k^2 = 4$ ossia se $k = \pm 2$.

Risultati percentuali relativi al quesito 10

Risposta A:	13.80%	Risposte giuste:	42.51%
Risposta B:	1.74%	Risposte errate:	20.57%
Risposta C:	0.94%	Risposte non date:	36.93%
Risposta D:	4.08%		
Risposta E:	42.51%		

11. Nel piano cartesiano l'equazione

$$x^2 + y^2 + 4x = \gamma,$$

con γ numero reale positivo, è:

- A. l'equazione di una circonferenza di centro $(-2,0)$ e raggio $\sqrt{\gamma+4}$
- B. l'equazione di una circonferenza di centro $(0, -4)$ e raggio $\sqrt{\gamma+2}$
- C. l'equazione di una circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{\gamma}$
- D. l'equazione di una circonferenza di centro $(-4,0)$ e raggio $\sqrt{\gamma+2}$
- E. l'equazione di una circonferenza di centro $(0, -2)$ e raggio $\sqrt{\gamma+4}$

Soluzione

La risposta A è giusta. Si dice circonferenza di centro il punto $C = (x_0, y_0)$ e raggio $r > 0$ il luogo dei punti del piano che hanno distanza r da C . Pertanto, tenendo conto della definizione di distanza di due punti nel piano, il generico punto $P = (x, y)$ deve soddisfare

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Da qui si ricava l'equazione canonica della circonferenza:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (3)$$

dove

$$a = -2x_0, \quad b = -2y_0, \quad c = x_0^2 + y_0^2 - r^2. \quad (4)$$

L'equazione considerata è pertanto del tipo (3) con $a = 4$, $b = 0$ e $c = -\gamma$. Usando allora le uguaglianze (4) si ottiene che l'equazione assegnata, per $\gamma > 0$, rappresenta una circonferenza con centro di coordinate $x_0 = -\frac{a}{2} = -2$, $y_0 = -\frac{b}{2} = 0$ e raggio $r = \sqrt{4 + \gamma}$.

Risultati percentuali relativi al quesito 11

Risposta A:	32.48%	Risposte giuste:	32.48%
Risposta B:	2.58%	Risposte errate:	15.83%
Risposta C:	5.13%	Risposte non date:	51.69%
Risposta D:	5.25%		
Risposta E:	2.88%		

12. Dato un numero reale positivo x e posto $f(x) = \log_{10} x$, si ha $f(10 \cdot x^{-2}) =$

- A. $\frac{1}{f(x)}$
- B. $2 - 2f(x)$
- C. $1 - 2f(x)$
- D. $\frac{1}{2f(x)}$
- E. $-2f(x)$

Soluzione

La risposta C è giusta. Il logaritmo di un prodotto di numeri positivi è uguale alla somma dei logaritmi dei due fattori, ovvero si ha: ✓

$$\log_{10}(a \cdot b) = \log_{10}(a) + \log_{10}(b),$$

qualunque siano i numeri reali positivi a e b . Il logaritmo di una potenza di base positiva ed esponente qualsiasi è uguale al prodotto fra l'esponente e il logaritmo della base. Vale cioè la formula:

$$\log_{10}(b^\alpha) = \alpha \log_{10}(b)$$

qualunque siano α e b numeri reali con $b > 0$.

Usando queste due proprietà della funzione logaritmo, e ricordando che $\log_{10}(10) = 1$, si trova

$$f(10 \cdot x^{-2}) = \log_{10}(10 \cdot x^{-2}) = \log_{10}(10) + \log_{10}(x^{-2}) = 1 - 2\log_{10}(x) = 1 - 2f(x).$$

Risultati percentuali relativi al quesito 12

Risposta A:	3.22%	Risposte giuste:	13.08%
Risposta B:	1.03%	Risposte errate:	15.26%
Risposta C:	13.08%	Risposte non date:	71.66%
Risposta D:	6.95%		
Risposta E:	4.06%		

13. Dal semicerchio di diametro $AB = 2$ cm e centro O si toglie il semicerchio di diametro AO . La figura così ottenuta si fa ruotare attorno ad AB con un giro di 360° . Il volume del solido ottenuto è

- A. $\frac{25}{3}\pi \text{ cm}^3$
- B. $\frac{7}{6}\pi \text{ cm}^3$
- C. $\frac{5}{6}\pi \text{ cm}^3$
- D. $4\pi \text{ cm}^3$
- E. $\frac{28}{3}\pi \text{ cm}^3$

Soluzione

La risposta B è giusta. Con la rotazione di 360° di un semicerchio intorno al suo diametro si ottiene una sfera avente lo stesso diametro del semicerchio ruotante. Perciò il solido considerato (che indicheremo con la lettera S) si ottiene sottraendo dalla sfera di diametro AB quella di diametro AO . Il volume di tale solido è, dunque, uguale alla differenza tra i volumi delle due sfere:

$$\text{Volume } (S) = \text{Volume (sfera di diametro } AB) - \text{Volume (sfera di diametro } AO)$$

Osserviamo ora che il raggio della sfera di diametro AB misura 1 cm. e che, essendo $AO = \frac{AB}{2}$, il

raggio della sfera di diametro AO misura $\frac{1}{2}$ cm.

Ricordando che per il volume V di una sfera di assegnato raggio $r > 0$ vale la formula:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ cm}^3,$$

si trova allora che il volume del solido S è:

$$V(S) = \frac{4}{3}\pi 1^3 \text{ cm}^3 - \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{ cm}^3 = \frac{4}{3}\pi \left(1 - \frac{1}{8}\right) \text{ cm}^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{7}{8} \text{ cm}^3 = \frac{7}{6}\pi \text{ cm}^3.$$

Risultati percentuali relativi al quesito 13

Risposta A:	1.38%	Risposte giuste:	8.61%
Risposta B:	8.61%	Risposte errate:	15.00%
Risposta C:	2.55%	Risposte non date:	76.40%
Risposta D:	5.55%		
Risposta E:	5.51%		

14. Nel piano cartesiano quanti sono i punti $P(x, y)$ per cui sono verificate tutte e tre le seguenti condizioni?

$$(x + y)^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x + y \leq 0$$

- A. Uno
- B. Due
- C. Infiniti
- D. Nessuno
- E. Quattro

Soluzione

La risposta B è giusta. La prima condizione $(x + y)^2 = 1$ è soddisfatta se e solo se risulta:

$$x + y = 1 \quad \text{oppure} \quad x + y = -1.$$

Poichè la terza condizione richiesta impone $x + y \leq 0$, avremo che prima e terza condizione insieme equivalgono a richiedere

$$x + y = -1.$$

I punti che soddisfano tutte e tre le condizioni assegnate sono quindi tutti e soli quelli che soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 - y \\ (-1 - y)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 - y \\ y^2 + y = 0 \end{cases}$$

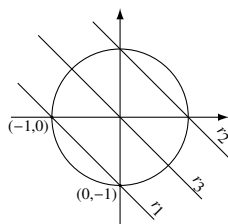
Risolvendo la seconda equazione dell'ultimo sistema nella variabile y e sostituendo i valori trovati nella prima equazione si ottengono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

NOTA Osserviamo che tale quesito poteva essere risolto anche geometricamente. Infatti, ciascuna delle tre condizioni

$$(x + y)^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x + y \leq 0$$

individua un sottoinsieme del piano. Il quesito richiede di determinare (se ne esistono) le intersezioni fra questi sottoinsiemi.



La prima relazione $(x + y)^2 = 1$ è soddisfatta da tutti e soli i punti delle due rette

$$r_1 : x + y = 1 \quad \text{e} \quad r_2 : x + y = -1.$$

La seconda relazione $x^2 + y^2 = 1$ è soddisfatta da tutti e soli i punti della circonferenza di centro l'origine e raggio 1, la quale interseca le due rette r_1 ed r_2 nei quattro punti $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. L'ultima condizione, $x + y \leq 0$ individua il semipiano che si trova al di sotto della retta $r_3 : x + y = 0$. Poiché dei quattro punti individuati precedentemente, solo i primi due $(-1,0)$, $(0,-1)$ si trovano in tale semipiano.

Risultati percentuali relativi al quesito 14

Risposta A:	8.13%	Risposte giuste:	14.34%
Risposta B:	14.34%	Risposte errate:	31.94%
Risposta C:	5.60%	Risposte non date:	53.72%
Risposta D:	16.05%		
Risposta E:	2.16%		

15. Nel piano cartesiano l'asse del segmento di estremi $A(0,0)$, $B(1,1)$ ha equazione

- A. $y = \frac{1}{2} - x$
- B. $y = 2 - x$
- C. $y = 1 - \frac{x}{2}$
- D. $y = 1 - x$
- E. $y = \frac{1-x}{2}$

Soluzione

La risposta D è giusta. La retta passante per i punti A e B (che è la bisettrice del primo e terzo quadrante) ha equazione cartesiana $y = x$ e dunque il suo coefficiente angolare vale 1. Ricordando che le perpendicolari ad una retta di coefficiente angolare $m \neq 0$ hanno coefficiente angolare $-\frac{1}{m}$, avremo che il coefficiente angolare delle rette perpendicolari al segmento di estremi A e B sarà uguale a -1 . ✓

L'asse del segmento AB è la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio $M = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e dunque ha equazione

$$y - \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

cioè $y = 1 - x$.

NOTA Ricordiamo che l'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento dato e passante per il suo punto medio. Ricordiamo inoltre che dato un segmento di estremi i punti $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ il suo punto medio è il punto $M = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$.

Risultati percentuali relativi al quesito 15

Risposta A:	4.85%	Risposte giuste:	31.99%
Risposta B:	5.74%	Risposte errate:	15.96%
Risposta C:	2.69%	Risposte non date:	52.05%
Risposta D:	31.99%		
Risposta E:	2.67%		

16. Il numero $\left(\frac{81}{\sqrt{64}}\right)^{1/4}$ è uguale a

- A. $\frac{3}{\sqrt{2}}$
- B. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$
- C. $\frac{24}{8^{5/4}}$
- D. $\frac{24}{64}$
- E. $\frac{3}{2}$

Soluzione

La risposta C è giusta. Applicando le regole relative alle potenze, si ha:



$$\left(\frac{81}{\sqrt{64}}\right)^{1/4} = \left(\frac{3^4}{8}\right)^{1/4} = \frac{(3^4)^{1/4}}{8^{1/4}} = \frac{3}{8^{1/4}}.$$

Osserviamo che la frazione

$$\frac{3}{(8)^{1/4}} = \frac{3}{2^{3/4}}.$$

è diversa da quella delle risposte A, B, E, che hanno lo stesso numeratore ma denominatori rispettivamente $2^{1/2}$, $2^{3/2}$, 2.

Le altre due risposte C e D prevedono frazioni con numeratore uguale a 24. Per ottenerlo, da $\frac{3}{8^{1/4}}$ abbiamo:

$$\left(\frac{81}{\sqrt{64}}\right)^{1/4} = \frac{3}{8^{1/4}} = \frac{3 \cdot 8}{8^{1/4} \cdot 8} = \frac{24}{8^{1/4+1}} = \frac{24}{8^{5/4}}.$$

Risultati percentuali relativi al quesito 16

Risposta A:	11.67%	Risposte giuste:	4.30%
Risposta B:	19.61%	Risposte errate:	44.70%
Risposta C:	4.30%	Risposte non date:	51.00%
Risposta D:	1.40%		
Risposta E:	12.01%		

17. La seguente espressione:

$$\frac{(3^{20} + 3^{20} + 3^{20})^{1/3}}{(3^3)^2}$$

vale

- A. 3^2
- B. 1
- C. 3
- D. $\frac{1}{3}$
- E. $\frac{1}{9}$

Soluzione

La risposta C è giusta.

Applicando le regole delle potenze si ottiene:

$$\frac{(3^{20} + 3^{20} + 3^{20})^{1/3}}{(3^3)^2} = \frac{(3 \cdot 3^{20})^{1/3}}{(3^3)^2} = \frac{(3^{1+20})^{1/3}}{3^{3 \cdot 2}} = \frac{3^{21 \cdot 1/3}}{3^6} = \frac{3^7}{3^6} = 3^{7-6} = 3$$

Risultati percentuali relativi al quesito 17

Risposta A:	4.86%	Risposte giuste:	19.05%
Risposta B:	2.72%	Risposte errate:	15.12%
Risposta C:	19.05%	Risposte non date:	65.83%
Risposta D:	2.86%		
Risposta E:	4.68%		

18. Sia Q un quadrato di lato ℓ , C_1 il cerchio circoscritto a Q , C_2 il cerchio inscritto in Q . Il rapporto tra l'area della superficie di C_1 e l'area della superficie di C_2 vale

- A. 4
- B. 2
- C. $\sqrt{2}$
- D. varia al variare di ℓ
- E. $2\sqrt{2}$

Soluzione

La risposta B è giusta. Il diametro di C_1 è uguale alla diagonale di Q cioè, per il teorema di Pitagora, a $\sqrt{\ell^2 + \ell^2} = \sqrt{2}\ell^2 = \ell\sqrt{2}$; perciò il suo raggio è uguale a $\ell\sqrt{2}/2$. Invece il raggio di C_2 è

l'apotema di Q e dunque vale $l/2$. Usando allora la formula per l'area del cerchio ($= \pi r^2$ dove r è il raggio) avremo:

$$\text{area } C_1 = \pi(l\sqrt{2}/2)^2 = \pi l^2 2/4 = \pi l^2/2,$$

$$\text{area } C_2 = \pi(l/2)^2 = \pi l^2/4.$$

Allora il rapporto tra le due aree è uguale a $\frac{\pi l^2/2}{\pi l^2/4} = 4/2 = 2$.

Risultati percentuali relativi al quesito 18

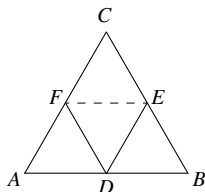
Risposta A:	2.14%	Risposte giuste:	12.46%
Risposta B:	12.46%	Risposte errate:	21.38%
Risposta C:	5.94%	Risposte non date:	66.17%
Risposta D:	8.55%		
Risposta E:	4.75%		

19. Dato il triangolo equilatero ABC il cui lato misura 2 cm, siano D, E, F i punti medi rispettivamente dei lati AB, BC, AC . L'area del rombo $DECF$ è

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$
- B. 2 cm^2
- C. $\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- D. $\sqrt{2} \text{ cm}^2$
- E. $\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ cm}^2$

Soluzione

La risposta A è giusta. In un triangolo qualsiasi, i segmenti che congiungono i punti medi dei tre lati suddividono il triangolo stesso in quattro triangoli fra loro uguali, ciascuno dei quali ha perciò area uguale ad un quarto di quella del triangolo di partenza. ✓



Notiamo inoltre che due dei quattro triangoli suddetti costituiscono il rombo $DECF$ e perciò

$$\text{area } (DECF) = \frac{1}{2} \text{ area } (ABC).$$

Infine sappiamo che l'area di un triangolo equilatero di lato l è uguale a $\frac{\sqrt{3}}{4} l^2$. Nel nostro caso, $\text{area}(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4} 2^2 \text{ cm}^2 = \sqrt{3} \text{ cm}^2$ e dunque $\text{area}(DECF) = \frac{1}{2} \sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Risultati percentuali relativi al quesito 19

Risposta A:	18.63%	Risposte giuste:	18.63%
Risposta B:	6.18%	Risposte errate:	16.05%
Risposta C:	5.41%	Risposte non date:	65.32%
Risposta D:	2.70%		
Risposta E:	1.76%		

20. Il 30% degli studenti iscritti ad un corso universitario ha superato l'esame relativo al corso al primo appello. Se, dei restanti studenti iscritti, il 10% supera l'esame al secondo appello, gli studenti che devono ancora superare l'esame dopo i primi due appelli saranno:

- A. il 37% del numero totale di studenti iscritti al corso.
- B. il 63% del numero totale di studenti iscritti al corso.
- C. il 70% del numero totale di studenti iscritti al corso.
- D. il 60% del numero totale di studenti iscritti al corso.
- E. il 40% del numero totale di studenti iscritti al corso.

Soluzione

La risposta B è giusta.

Dopo il primo appello, il $(100 - 30)\% = 70\%$ del totale degli iscritti non ha ancora superato l'esame. Se il 10% dei restanti studenti lo supera al secondo appello, rimarrà il $(100 - 10)\% = 90\%$ di quel 70% a non averlo ancora superato. Ora, il 90% di 70 è uguale a $\frac{90}{100} \cdot \frac{70}{100} = \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{63}{100}$. Pertanto gli studenti residui saranno il 63% del totale.

Risultati percentuali relativi al quesito 20

Risposta A:	2.79%	Risposte giuste:	34.74%
Risposta B:	34.74%	Risposte errate:	32.74%
Risposta C:	2.35%	Risposte non date:	32.52%
Risposta D:	25.99%		
Risposta E:	1.62%		

21. Nel piano cartesiano, il luogo dei punti di coordinate (x, y) che verificano l'equazione $(y - 2x^2)(y^2 - 4) = 0$ è:
- A. L'insieme costituito dai punti di coordinate $(1, -2), (1, 2)$
 - B. L'insieme costituito dai punti di coordinate $(1, 2), (-1, 2)$
 - C. L'unione di una parabola e di due rette
 - D. L'intersezione di un'iperbole e di due rette
 - E. L'intersezione di una parabola e di due rette

Soluzione

La risposta C è giusta. Per la legge di annullamento del prodotto, il prodotto dei due fattori $(y - 2x^2)(y^2 - 4)$ è nullo se e solo se almeno uno dei due fattori è nullo, ovvero se e solo se risulta

$$y - 2x^2 = 0 \quad \text{oppure} \quad y^2 - 4 = 0.$$

La prima equazione è equivalente a $y = 2x^2$ che è l'equazione cartesiana di una parabola che ha come asse di simmetria l'asse delle ordinate, mentre la seconda equazione $y^2 - 4 = 0$ ha come soluzioni $y = 2$ oppure $y = -2$ ciascuna delle quali è l'equazione cartesiana di una retta parallela all'asse delle ascisse.

Risultati percentuali relativi al quesito 21

Risposta A:	5.22%	Risposte giuste:	8.25%
Risposta B:	8.49%	Risposte errate:	27.43%
Risposta C:	8.25%	Risposte non date:	64.32%
Risposta D:	3.44%		
Risposta E:	10.28%		

22. I numeri interi strettamente positivi a, b, c, d sono tutti differenti tra loro e sono tutti minori di 6. Sapendo che la loro somma vale 12 determinare il loro prodotto.
- A. 60
 - B. 24
 - C. 50
 - D. 40
 - E. 30

Soluzione

La risposta D è giusta. I numeri a, b, c, d sono numeri interi, ovvero numeri dell'insieme

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

D'altra parte, a, b, c, d sono numeri positivi e minori di 6. Dunque appartengono al sottoinsieme di $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Inoltre a, b, c, d sono tutti differenti fra loro e la loro somma è uguale a 12. Dei numeri dell'insieme $\mathbb{S}$ solo i numeri 1, 2, 4, 5 soddisfano le ipotesi richieste: infatti il loro prodotto è uguale a $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$.

Risultati percentuali relativi al quesito 22

Risposta A:	8.47%	Risposte giuste:	79.14%
Risposta B:	2.49%	Risposte errate:	13.41%
Risposta C:	0.54%	Risposte non date:	7.45%
Risposta D:	79.14%		
Risposta E:	1.91%		

23. Quanti sono i numeri reali x che sono soluzioni dell'equazione

$$\tan(2x - 5\pi) = -10^4$$

- A. uno
- B. cinque
- C. infiniti
- D. nessuno
- E. due

Soluzione

La risposta C è giusta. La funzione tangente è periodica di periodo π . Pertanto l'equazione data è equivalente a $\tan(2x) = -10^4$ che con il cambiamento d'incognita $y = 2x$ si scrive $\tan y = -10^4$. Poiché la funzione $\tan y$, per $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, assume tutti i valori reali, in tale intervallo esiste una soluzione dell'equazione $\tan y = -10^4$. Detta y_0 tale soluzione, per la periodicità della tangente avremo poi le infinite soluzioni $y = y_0 + k\pi$, con k intero. Tornando allora all'incognita x , le soluzioni dell'equazione proposta saranno gli infiniti valori $x = \frac{y_0}{2} + k\frac{\pi}{2}$, con k intero. ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 23

Risposta A:	6.69%	Risposte giuste:	8.85%
Risposta B:	0.82%	Risposte errate:	25.05%
Risposta C:	8.85%	Risposte non date:	66.10%
Risposta D:	8.34%		
Risposta E:	9.20%		

24. Un triangolo rettangolo, ruotando attorno ai propri cateti, genera due coni. Il rapporto fra i volumi dei due coni è pari al rapporto fra
- A. il cateto maggiore e l'ipotenusa
 - B. i cateti
 - C. i quadrati dei cateti
 - D. il cateto minore e l'ipotenusa
 - E. i cubi dei cateti

Soluzione

La risposta B è giusta. Osserviamo che ciascuno dei due coni ha uno dei due cateti come raggio di base e l'altro come altezza rispettivamente. Denotiamo con b e c le lunghezze dei due cateti, con V_1 il volume del cono con raggio di base b e con V_2 il volume del cono con raggio di base c . Dalla formula del volume del cono avremo

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi b^2 c}{\pi c^2 b} = \frac{b}{c}.$$

Risultati percentuali relativi al quesito 24

Risposta A:	2.40%	Risposte giuste:	29.36%
Risposta B:	29.36%	Risposte errate:	31.97%
Risposta C:	11.82%	Risposte non date:	38.66%
Risposta D:	2.36%		
Risposta E:	15.39%		

25. Per quale dei seguenti valori di x si ha $\sin\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{\sin(x)}{3}$

- A. $x = \frac{\pi}{3}$
- B. $x = 3\pi$
- C. $x = 2\pi$
- D. $x = \frac{\pi}{6}$
- E. $x = \frac{\pi}{2}$

Soluzione

La risposta B è giusta. Con la sostituzione $y = \frac{x}{3}$, l'equazione proposta diviene

$$3 \sin y = \sin 3y \quad (5)$$

Usando ora le formule di addizione e di duplicazione il secondo membro della precedente equazione diventa:

$$\begin{aligned}\sin(3y) &= \sin(2y + y) = \sin 2y \cos y + \cos 2y \sin y \\ &= 2 \sin y \cos^2 y + (1 - 2 \sin^2 y) \sin y \\ &= 2 \sin y (1 - \sin^2 y) + \sin y - 2 \sin^3 y\end{aligned}$$

Perciò risulta:

$$\sin 3y = 3 \sin y - 4 \sin^3 y$$

Tenendo conto della precedente relazione, l'equazione (5) diventa

$$3 \sin y = 3 \sin y - 4 \sin^3 y$$

che equivale a $\sin y = 0$. Tornando alla x , troviamo allora che deve risultare $\sin x/3 = 0$. L'unico fra i valori di x proposti che soddisfa a questa relazione è 3π . Infatti, se $x = 3\pi$ si ha $\sin x/3 = \sin \pi = 0$. Per tutti gli altri valori proposti si ha $0 < x/3 < \pi$ e perciò $\sin x/3 > 0$.

Risultati percentuali relativi al quesito 25

Risposta A:	5.73%	Risposte giuste:	30.34%
Risposta B:	30.34%	Risposte errate:	21.36%
Risposta C:	5.44%	Risposte non date:	48.30%
Risposta D:	4.55%		
Risposta E:	5.64%		

26. Si considerino tutti i numeri reali a della forma

$$a = \frac{3n + 3 + (-1)^n}{n + 1}$$

dove n è un qualunque intero positivo. Quanti dei numeri a sono maggiori di 2,99?

- A. infiniti, ma non tutti
- B. nessuno
- C. uno
- D. due
- E. tutti

Soluzione

La risposta A è giusta. I numeri a si possono scrivere nel modo seguente:



$$a = \frac{3(n + 1) + (-1)^n}{n + 1} = 3 + \frac{(-1)^n}{n + 1}.$$

Perciò la disuguaglianza $a > 2,99$ equivale a

$$0,01 + \frac{(-1)^n}{n + 1} > 0,$$

cioè

$$\frac{1}{100} > \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}. \quad (6)$$

In tale disuguaglianza il primo membro ($1/100$) è positivo (ed indipendente da n); perciò essa è certamente vera per gli n pari: in questo caso infatti $n+1$ è dispari e dunque il secondo membro della disuguaglianza è negativo, avendosi $(-1)^{n+1} = -1$.

D'altra parte per alcuni n dispari (quelli da 1 a 99) la disuguaglianza è falsa. Ad esempio, per $n = 1$ la disuguaglianza (6) diventa

$$\frac{1}{100} > \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2},$$

che è evidentemente falsa.

Risultati percentuali relativi al quesito 26

Risposta A:	35.88%	Risposte giuste:	35.88%
Risposta B:	6.64%	Risposte errate:	21.99%
Risposta C:	4.21%	Risposte non date:	42.13%
Risposta D:	2.74%		
Risposta E:	8.39%		

-
27. Siano dati nel piano due triangoli equilateri che si possono ruotare e traslare liberamente uno rispetto all'altro. Data una qualsiasi posizione dei due triangoli, la loro porzione di superficie sovrapposta non potrà mai essere

- A. un trapezio
- B. un esagono
- C. un rettangolo
- D. un triangolo equilatero
- E. un triangolo rettangolo

Soluzione

La risposta C è giusta. Siano l_1 ed l_2 i lati dei due triangoli, con $l_1 \leq l_2$, e disegniamo il triangolo maggiore con un lato orizzontale ed il vertice opposto in alto. ✓

Si può ottenere un trapezio ad esempio scegliendo $l_1 < l_2$ e disponendo il triangolo di lato l_2 con un lato interno al primo ed anch'esso orizzontale ed il vertice opposto esterno al triangolo maggiore come nella figura 1. Dunque la risposta A è sbagliata.

Per realizzare un esagono è sufficiente che ogni lato di ciascun triangolo possa incontrarne due dell'altro. Ad esempio se si dispongono i triangoli come nella figura 2 la superficie sovrapposta sarà un esagono. Perciò anche la risposta B è sbagliata.

Un triangolo equilatero si può ottenere scegliendo $l_1 = l_2$ e sovrapponendo perfettamente i due triangoli. In questo modo si ottiene che la superficie sovrapposta è un triangolo equilatero e perciò la risposta D è sbagliata.

Si ottiene infine un triangolo rettangolo se si dispone il secondo triangolo con un lato verticale come in Figura 3, cosicché anche la risposta E è sbagliata.

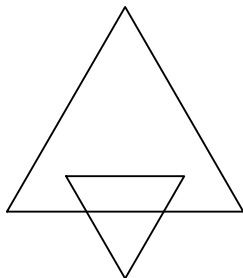


Figura 1: Trapezio

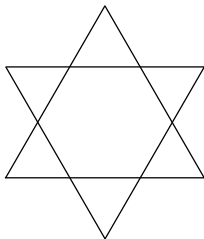


Figura 2: Esagono

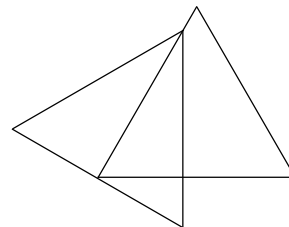


Figura 3: Triangolo rettangolo

Risultati percentuali relativi al quesito 27

Risposta A:	5.45%	Risposte giuste:	34.64%
Risposta B:	19.09%	Risposte errate:	37.37%
Risposta C:	34.64%	Risposte non date:	28.00%
Risposta D:	2.76%		
Risposta E:	10.07%		

28. Sia x un numero razionale che soddisfa questa proprietà:

$$x \leq y \quad \text{per ogni } y \text{ razionale tale che } y > \sqrt{2}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- A. x è il più grande numero razionale minore di $\sqrt{2}$
- B. x è il più piccolo numero razionale maggiore di $\sqrt{2}$
- C. $x = y$
- D. $x < \sqrt{2}$
- E. $x = \sqrt{2}$

Soluzione

La risposta D è giusta. Non può essere $x > \sqrt{2}$ poiché in tal caso per le proprietà dell'insieme dei numeri razionali, esisterebbe un razionale y tale che $\sqrt{2} < y < x$, contrariamente all'ipotesi; perciò le affermazioni B e C sono false. Neppure può essere $x = \sqrt{2}$ (cioè anche E è falsa), poiché x è per ipotesi razionale mentre $\sqrt{2}$ è irrazionale. Allora deve essere necessariamente $x < \sqrt{2}$, cioè l'affermazione D è vera. Invece l'affermazione A è falsa in quanto, come prima, essendo $x < \sqrt{2}$ esiste un altro numero razionale x_1 tale che $x < x_1 < \sqrt{2}$.



Risultati percentuali relativi al quesito 28

Risposta A:	16.57%	Risposte giuste:	18.48%
Risposta B:	13.34%	Risposte errate:	39.23%
Risposta C:	4.52%	Risposte non date:	42.29%
Risposta D:	18.48%		
Risposta E:	4.80%		

29. Date le due circonferenze rispettivamente di centro $(0, 0)$ e raggio 1 e di centro $(2, 2)$ e raggio 1, si indichi con $d(P_1, P_2)$ la distanza tra un generico punto P_1 che sta sulla prima circonferenza ed un generico punto P_2 che sta sulla seconda circonferenza. Si consideri poi il minimo m di $d(P_1, P_2)$ al variare di P_1 e di P_2 . Si ha che

- A. $m = \sqrt{2}$
- B. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- C. $m = \sqrt{2} - 1$
- D. tale minimo non esiste
- E. $m = 2(\sqrt{2} - 1)$

Soluzione

La risposta E è giusta. La somma dei due raggi vale $1 + 1 = 2$ e risulta perciò minore della distanza dei centri che è $\sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2} > 2$. Per questo motivo le due circonferenze sono esterne l'una all'altra. Diciamo Q_1, Q_2 i punti in cui esse incontrano il segmento c_1c_2 , t_1, t_2 le rispettive tangenti in tali punti. Queste due rette sono entrambe perpendicolari a c_1c_2 e perciò parallele fra loro. Inoltre la loro distanza è uguale a quella fra i punti Q_1 e Q_2 e questa a sua volta è equivalente alla differenza fra la distanza dei centri ($= 2\sqrt{2}$) e la somma dei raggi ($= 2$):

$$d(Q_1, Q_2) = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Infine si osserva che le due circonferenze sono esterne alla striscia di lati t_1, t_2 e situate da parti opposte rispetto a questa. Perciò, qualunque siano i punti P_1 sulla prima circonferenza e P_2 sulla seconda, si ha $d(P_1, P_2) \geq d(Q_1, Q_2)$. Così il minimo m della quantità $d(P_1, P_2)$ si ottiene proprio quando $P_1 = Q_1$ e $P_2 = Q_2$:

$$m = d(Q_1, Q_2) = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Risultati percentuali relativi al quesito 29

Risposta A:	3.33%	Risposte giuste:	12.31%
Risposta B:	3.04%	Risposte errate:	13.81%
Risposta C:	2.44%	Risposte non date:	73.87%
Risposta D:	5.01%		
Risposta E:	12.31%		

-
30. Un'azienda vinicola produce il rinomato *pirLOT*, un miscuglio di bianco pinot e di rosso merlot in parti uguali. Da una bottiglia il produttore ne preleva $\frac{1}{3}$ e lo rimpiazza con una parte identica di solo pinot, poi preleva $\frac{1}{4}$ del nuovo miscuglio e lo rimpiazza ancora con una parte identica di solo pinot. Quale frazione del miscuglio finale è composta di pinot?
- A. $\frac{5}{7}$
B. $\frac{7}{12}$
C. $\frac{5}{12}$
D. $\frac{2}{3}$
E. $\frac{3}{4}$

Soluzione

La risposta E è giusta. Dopo il primo prelievo, il contenuto della bottiglia si riduce ai suoi due terzi, e lo stesso avviene per ciascun componente del miscuglio. Dunque il merlot (come il pinot) passa dall'iniziale mezza bottiglia a $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ di bottiglia. E tanto rimane dopo il successivo riempimento con il solo pinot. ✓

Con il secondo prelievo il contenuto si riduce a tre quarti di bottiglia, e in ugual misura si riduce ciascun componente. Dunque il merlot passa questa volta da $\frac{1}{3}$ a $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ di bottiglia; e tanto rimane dopo il nuovo riempimento. Dunque alla fine il contenuto della bottiglia piena sarà costituito per $\frac{1}{4}$ di merlot; allora gli altri $\frac{3}{4}$ saranno di pinot.

Risultati percentuali relativi al quesito 30

Risposta A:	4.46%	Risposte giuste:	16.78%
Risposta B:	30.02%	Risposte errate:	50.32%
Risposta C:	11.31%	Risposte non date:	32.90%
Risposta D:	4.53%		
Risposta E:	16.78%		

31. Rispetto ad un sistema cartesiano Oxy la distanza del punto di coordinate $(-4, 2)$ dalla retta di equazione $x = 2$ è:
- A. -2
 - B. 2
 - C. -6
 - D. 6
 - E. 4

Soluzione

La distanza di un punto da una retta è per definizione la misura del segmento di perpendicolare tracciata dal punto sulla retta. Poiché la retta di equazione $x = 2$ è parallela all'asse delle y , ogni retta ad essa perpendicolare sarà parallela all'asse delle x . L'unica retta che passa per il punto $(-4, 2)$ ed è parallela all'asse delle x è la retta di equazione $y = 2$. Tale retta incontra la retta $x = 2$ nel punto di coordinate $(2, 2)$. Pertanto la distanza dal punto $(-4, 2)$ dalla retta $x = 2$ coincide con la misura del segmento gli estremi $(-4, 2)$, $(2, 2)$.

Tale misura, essendo le ordinate dei due punti in questione coincidenti, è data dal valore assoluto della differenza tra le loro ascisse. Calcolando esplicitamente abbiamo che $|2 - (-4)| = 6$ e dunque **la risposta esatta è la D.**



Risultati percentuali relativi al quesito 31

Risposta A:	3.29%	Risposte giuste:	69.17%
Risposta B:	5.01%	Risposte errate:	9.23%
Risposta C:	8.29%	Risposte non date:	21.60%
Risposta D:	69.17%		
Risposta E:	5.01%		

32. La scomposizione in fattori primi del numero 30^{13} è:

- A. $2^{15}3^{12}7^{13}$
- B. $2^{13}3^{13}5^{13}$
- C. 30^{13}
- D. $6^{13}5^{13}$
- E. impossibile

Soluzione

Ricordiamo che scomporre un numero in fattori primi significa esprimerlo come prodotto di potenze di numeri primi (non banali), cioè di numeri divisibili solo per 1 o per se stessi diversi da 1. Ricordiamo inoltre che sussiste la seguente proprietà delle potenze

$$(a \cdot b)^y = a^y \cdot b^y$$

Poiché la scomposizione in fattori primi del numero 30 è data da

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

si ha che

$$30^{13} = 2^{13} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

Pertanto **la risposta esatta è la B.**



Risultati percentuali relativi al quesito 32

Risposta A:	0.94%	Risposte giuste:	64.01%
Risposta B:	64.01%	Risposte errate:	20.50%
Risposta C:	5.16%	Risposte non date:	15.49%
Risposta D:	3.91%		
Risposta E:	5.48%		

33. Sia a un numero reale maggiore di 1. L'espressione numerica

$$\log_a \sqrt{\frac{a^2 \sqrt{a}}{a^{\frac{5}{2}}}}$$

è uguale a:

- A. -1
- B. a
- C. e
- D. 0
- E. $+1$

Soluzione

Utilizzando le proprietà delle potenze:

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} \\ a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\ \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \end{aligned}$$

riscriviamo l'espressione assegnata come segue

$$\log_a \sqrt{\frac{a^2 \sqrt{a}}{a^{\frac{5}{2}}}} = \log_a \sqrt{\frac{a^2 a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}}} = \log_a \sqrt{\frac{a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}}} = \log_a 1$$

D'altra parte ricordiamo che $\log_a b$ è per definizione il numero reale y tale che $a^y = b$. Quindi

$$\log_a 1 = 0$$

poiché $a^0 = 1$. Dunque concludiamo che **la risposta esatta è la D.**



Risultati percentuali relativi al quesito 33

Risposta A:	2.97%	Risposte giuste:	36.62%
Risposta B:	3.91%	Risposte errate:	43.82%
Risposta C:	3.91%	Risposte non date:	19.56%
Risposta D:	36.62%		
Risposta E:	8.76%		



34. Una squadra di operai deve asfaltare una piazza circolare. Arrivata sul posto scopre che la piazza ha diametro doppio del previsto. Quanto asfalto serve rispetto a quello preventivato?
- A. Non si può rispondere se non si conosce il raggio previsto o quello effettivo.
 - B. Una quantità π^2 volte quella prevista
 - C. Il doppio
 - D. Il quadruplo
 - E. Una quantità 2π volte quella prevista

Soluzione

Ricordiamo che l'area di un cerchio di raggio r è data dalla formula πr^2 . Se il diametro della piazzola è doppio del previsto, il raggio della piazzola è doppio del previsto. Dunque l'area sarà data da

$$\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$$

Pertanto l'area del cerchio di raggio doppio ha area quadrupla e concludiamo che **la risposta esatta è la D.**



Risultati percentuali relativi al quesito 34

Risposta A:	3.29%	Risposte giuste:	56.03%
Risposta B:	4.38%	Risposte errate:	8.92%
Risposta C:	18.15%	Risposte non date:	35.05%
Risposta D:	56.03%		
Risposta E:	9.23%		



35. Un motociclista accorto, in un suo viaggio di 600 km, fa uso anche della ruota di scorta in maniera che alla fine del viaggio le tre ruote subiscano la stessa usura. Quanti chilometri avrà percorso ogni ruota alla fine del viaggio?
- A. 350 km
 - B. 400 km
 - C. 450 km
 - D. 500 km
 - E. 200 km

Soluzione

Poiché si vuole che ogni ruota abbia la stessa usura, essa dovrà percorrere un tratto di strada pari ad un terzo del percorso totale moltiplicato per due. Detta x l'usura di ciascuna ruota si avrà allora che

$$x = \frac{2}{3}600 \text{ km} = 400 \text{ km}$$

Quindi **la risposta esatta è la B.**



Risultati percentuali relativi al quesito 35

Risposta A:	3.13%	Risposte giuste:	55.71%
Risposta B:	55.71%	Risposte errate:	9.08%
Risposta C:	2.19%	Risposte non date:	35.21%
Risposta D:	0.16%		
Risposta E:	29.73%		



36. Sia A l'insieme dei numeri interi positivi dispari o primi. Allora è vero che:

- A. $12 \in A$
- B. $98 \in A$
- C. $13 \notin A$
- D. $2 \in A$
- E. $3 \notin A$

Soluzione

Dalla definizione abbiamo che un numero appartiene all'insieme A se è un numero intero dispari (cioè non divisibile per 2) oppure primo (cioè divisibile solo per 1 e per se stesso). Allora osserviamo che **la risposta esatta è la D.** Infatti $2 \in A$ in quanto il numero 2 è primo, pur essendo pari. Tutte le altre risposte sono false, in quanto 12 e 98 essendo pari non appartengono ad A mentre 3 e 13 sono dispari e dunque appartengono ad A .



Risultati percentuali relativi al quesito 36

Risposta A:	1.25%	Risposte giuste:	76.84%
Risposta B:	2.50%	Risposte errate:	11.42%
Risposta C:	5.63%	Risposte non date:	11.74%
Risposta D:	76.84%		
Risposta E:	2.35%		

37. Rispetto ad un piano cartesiano Oxy i punti del piano diversi dal punto $(-1,2)$ sono tutti e soli i punti (x,y) tali che:

- A. $y \neq 2$
- B. $xy \neq -2$
- C. $x \neq -1$
- D. $x \neq -1$ oppure $y \neq 2$
- E. $x \neq -1$ e $y \neq 2$

Soluzione

Due punti del piano cartesiano Oxy coincidono se e solo se hanno le stesse coordinate. Dunque i punti del piano cartesiano Oxy diversi dal punto $(-1,2)$ sono tutti e soli i punti che hanno o l'ascissa diversa da -1 oppure l'ordinata diversa da 2 . Pertanto **la risposta esatta è la D.** ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 37

Risposta A:	0.31%	Risposte giuste:	27.86%
Risposta B:	1.56%	Risposte errate:	13.46%
Risposta C:	0.31%	Risposte non date:	58.69%
Risposta D:	27.86%		
Risposta E:	56.49%		

38. Rispetto ad un piano cartesiano Oxy l'equazione dell'asse del segmento di estremi $(0,0)$ e $(2,2)$ è:

- A. $x - y = 2$
- B. $x = 1$
- C. $y = x$
- D. $x + y = 2$
- E. $y = 1$

Soluzione

Il segmento di estremi (0,0) e (2,2) appartiene alla retta di equazione $y = x$. Ciò si ricava facilmente osservando che tutte e sole le rette passanti per l'origine sono della forma $y = mx$ e imponendo che il punto (2,2) appartenga alla retta ricaviamo che $2 = 2m$ e cioè $m = 1$.

L'asse di un segmento è la retta ad esso perpendicolare che passa per il suo punto medio. Ricordiamo che il punto medio di un segmento ha come ascissa la semisomma delle ascisse e come ordinata la semisomma delle ordinate. Pertanto il punto medio del segmento di estremi (0,0) e (2,2) è il punto di coordinate (1,1). L'asse del segmento, dovendo essere perpendicolare alla retta $y = x$ avrà equazione del tipo $y = -x + q$. Infatti la condizione di perpendicolarità tra rette in un piano cartesiano ($m \cdot m' = -1$) implica che il coefficiente angolare dell'asse x è -1 . Imponendo che il punto (1,1) appartenga a tale retta ricaviamo

$$1 = -1 + q \Rightarrow q = 2$$

Quindi l'asse del segmento ha equazione $y = -x + 2$ e concludiamo che **la risposta esatta è la D.** ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 38

Risposta A:	4.69%	Risposte giuste:	25.51%
Risposta B:	2.35%	Risposte errate:	10.95%
Risposta C:	55.09%	Risposte non date:	63.54%
Risposta D:	25.51%		
Risposta E:	1.41%		

39. Se a e b sono numeri reali tali che $a^2 + b^2 = 0$ allora si può concludere che certamente è:

- A. $a > b$
- B. $ab < -1$
- C. $a + b = 1$
- D. $a + b = 0$
- E. $ab > 0$

Soluzione

Basta osservare che l'equazione $a^2 + b^2 = 0$ è soddisfatta nel campo dei numeri reali solo dalla coppia $a = 0, b = 0$. Infatti se a fosse diverso da 0 o b fosse diverso da 0, la quantità $a^2 + b^2$ sarebbe strettamente maggiore di 0, in quanto nel campo dei numeri reali non esistono numeri il cui quadrato è negativo. Se, dunque, a e b sono entrambi nulli, anche la loro somma è nulla. Pertanto **la risposta esatta è la D.** ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 39

Risposta A:	2.35%	Risposte giuste:	61.35%
Risposta B:	4.85%	Risposte errate:	24.88%
Risposta C:	0.47%	Risposte non date:	13.77%
Risposta D:	61.35%		
Risposta E:	6.10%		

40. La disequazione $\cos x + \sin x \geq \sqrt{2}$ è verificata nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$ per:

- A. ogni x
- B. $x = -\frac{\pi}{4}$
- C. almeno un x tale che $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
- D. $x = \frac{\pi}{4}$
- E. nessun x

Soluzione

Ricordiamo le ben note formule parametriche che consentono di esprimere $\cos x$ e $\sin x$ in funzione di $t = \tan \frac{x}{2}$. Abbiamo cioè che

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Usando queste formule, la disequazione assegnata si trasforma nella seguente disequazione di secondo grado nell'incognita t :

$$\begin{aligned} \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{2t}{1 + t^2} &\geq \sqrt{2} \\ \Downarrow \\ 1 - t^2 + 2t &\geq \sqrt{2}(1 + t^2) \\ \Downarrow \\ (\sqrt{2} + 1)t^2 - 2t + \sqrt{2} - 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

Il discriminante di questo trinomio di secondo grado è dato da

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1 - (2 - 1) = 0$$

Di conseguenza il trinomio considerato non è mai strettamente minore di zero e risulta essere uguale a zero in corrispondenza di

$$t = \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{2} - 1.$$

Ricordando che $t = \tan \frac{x}{2}$, siamo ricondotti a risolvere l'equazione

$$\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2} - 1$$

che è soddisfatta per $x = \frac{\pi}{4}$. Deduciamo che l'unico valore nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$ per il quale la disequazione $\cos x + \sin x \geq \sqrt{2}$ è verificata è $x = \frac{\pi}{4}$ e cioè **la risposta esatta è la D.** ✓
 A conclusioni identiche si arriva esaminando il caso più generale basato sulla seguente identità:

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x \right)$$

I due fattori fratti godono della proprietà che la somma dei loro quadrati è unitaria; perciò possono essere identificati con il coseno e il seno di un opportuno angolo, precisamente dell'angolo

$$\varphi = \arctan \frac{B}{A} + k\pi \quad \text{per ogni } k \text{ intero}$$

Nel nostro caso, dove ci interessa l'intervallo compreso fra 0 e π , possiamo assumere $k = 0$; inoltre, con $A = B = 1$ l'angolo risulta $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Sostituendo i valori trovati per A , B e φ nella disuguaglianza data e, ricordando la formula del coseno della differenza di due angoli, otteniamo

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq \sqrt{2}$$

Siccome il coseno ha un massimo che vale 1 quando il suo argomento è nullo, e questo accade per $x = \frac{\pi}{4}$, un valore che cade dentro all'intervallo specificato, il primo membro ha un massimo che vale esattamente $\sqrt{2}$, perciò la disuguaglianza data è verificata con il segno di uguaglianza sia pure solo per un valore di x ; Dunque la risposta esatta è la D.

NOTA Si può procedere anche per esclusione: la risposta A è falsa perché esiste almeno il valore $x = 0$ per il quale la disuguaglianza non è verificata; la risposta B è falsa perché il valore di x indicato cade fuori dell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$; la risposta C è falsa perché nell'intervallo indicato il coseno è sempre negativo e il seno sempre positivo e, visto che l'uno e l'altro sono sempre minori di 1 in modulo, la loro somma può essere compresa solo nell'intervallo $[-1, +1]$, fuori dal limite della disuguaglianza; la risposta D è verificata per $x = \frac{\pi}{4}$, quando sia il coseno sia il seno valgono $1/\sqrt{2}$ e quindi la loro somma vale $\sqrt{2}$; la risposta E è falsa perché, appunto, esiste almeno il valore $x = \frac{\pi}{4}$ che permette di soddisfare la disuguaglianza.

Risultati percentuali relativi al quesito 40

Risposta A:	5.16%	Risposte giuste:	21.91%
Risposta B:	2.35%	Risposte errate:	56.65%
Risposta C:	8.45%	Risposte non date:	21.44%
Risposta D:	21.91%		
Risposta E:	5.48%		

41. Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy , è data la circonferenza di equazione $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}y^2 - 2x - 2y = 0$. Allora il suo raggio è:
- A. $\sqrt{\frac{2}{3}}$
 - B. 3
 - C. $\sqrt{3}$
 - D. 1
 - E. 2

Soluzione

Ricordiamo che l'equazione di una circonferenza di centro $C = (x_0, y_0)$ e raggio r in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy si trova imponendo che la distanza di un suo punto generico (x, y) dal centro sia uguale al raggio e cioè

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

da cui, esplicitando i quadrati e riordinando, otteniamo

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

Poiché la circonferenza assegnata può essere scritta equivalentemente come segue:

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}}y = 0$$

deduciamo che il suo centro è il punto di coordinate $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e che deve essere soddisfatta l'equazione

$$x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

Sostituendo il valore delle coordinate del centro otteniamo

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - r^2 = 0$$

e cioè

$$r^2 = \frac{2}{3}$$

Pertanto **la risposta esatta è la A.**



Risultati percentuali relativi al quesito 41

Risposta A:	13.62%	Risposte giuste:	13.62%
Risposta B:	4.38%	Risposte errate:	65.10%
Risposta C:	6.57%	Risposte non date:	21.28%
Risposta D:	4.69%		
Risposta E:	5.63%		

42. In un parallelogramma di perimetro $2p$ si ha che :
- A. almeno una diagonale ha lunghezza pari a p
 - B. ogni diagonale ha lunghezza minore di p
 - C. ogni diagonale ha lunghezza maggiore di p
 - D. la somma delle lunghezze delle diagonali è minore di p
 - E. una diagonale ha lunghezza maggiore di p , l'altra minore di p

Soluzione

Ricordiamo che i lati opposti di un parallelogramma hanno la stessa lunghezza. Ciò implica che la somma delle lunghezze di due lati consecutivi è pari alla metà del perimetro, cioè a p . D'altra parte ogni diagonale forma con due lati consecutivi del parallelogramma un triangolo. Poiché in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due, ogni diagonale deve avere lunghezza minore della somma delle lunghezze di due lati consecutivi, cioè deve avere lunghezza minore di p . Concludiamo che **la risposta esatta è la B.** ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 42

Risposta A:	2.50%	Risposte giuste:	51.96%
Risposta B:	51.96%	Risposte errate:	27.54%
Risposta C:	5.48%	Risposte non date:	20.50%
Risposta D:	2.97%		
Risposta E:	9.55%		

43. Dato un esagono regolare di lato L , l'area del rettangolo che ha due lati coincidenti con due lati paralleli dell'esagono è uguale a:
- A. $2\sqrt{2}L$
 - B. $\sqrt{3}L^2$
 - C. quella del cerchio circoscritto all'esagono
 - D. $2L^2$
 - E. quella del cerchio inscritto all'esagono

Soluzione

Tracciando il rettangolo che ha due lati coincidenti con due lati paralleli dell'esagono si osserva che gli altri due lati sono basi di due triangoli isosceli, i cui lati uguali coincidono con i lati dell'esagono e quindi hanno lunghezza L . Si osserva inoltre che gli angoli interni dell'esagono misurano 120° e quindi che tali triangoli isosceli hanno l'angolo opposto alla base che misura 120° e gli angoli adiacenti alla base che misurano 30° . Tracciando l'altezza relativa alla base si formano due triangoli rettangoli i cui angoli misurano 30° e 60° . Ricordando che in un triangolo rettangolo i cateti sono uguali alla misura dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto, ricaviamo che il lato del rettangolo ha misura data da

$$2L \cdot \sin 60^\circ = 2L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = L\sqrt{3}$$

Poiché l'area del rettangolo si calcola moltiplicando la misura della base per la misura dell'altezza troviamo che essa misura $\sqrt{3}L^2$. Pertanto **la risposta esatta è la B.** ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 43

Risposta A:	9.55%	Risposte giuste:	15.18%
Risposta B:	15.18%	Risposte errate:	56.34%
Risposta C:	1.56%	Risposte non date:	28.48%
Risposta D:	8.14%		
Risposta E:	9.23%		

44. L'equazione

$$\sqrt{x^2} - x = 0$$

è verificata

- A. solo per $x = -1$
- B. solo per $x \geq 0$
- C. solo per $x = 0$
- D. solo per $x = 1$
- E. $\forall x \in \mathbb{R}$

Soluzione

Ricordiamo che la radice quadrata di un numero reale $a \geq 0$ è quel numero reale $y \geq 0$ tale che $y^2 = a$. Dunque

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

dove con $|x|$ denotiamo il valore assoluto di x che è definito come segue

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Allora l'equazione assegnata è equivalente alla seguente

$$|x| - x = 0$$

e quindi le soluzioni si trovano unendo le soluzioni dei due sistemi seguenti

$$\text{i) } \begin{cases} x \geq 0 \\ x - x = 0 \end{cases} \qquad \text{ii) } \begin{cases} x < 0 \\ -x - x = 0 \end{cases}$$

Poiché il sistema i) ha come soluzioni tutti i numeri reali $x \geq 0$ e il sistema ii) non ammette nessuna soluzione, concludiamo che **la risposta esatta è la B.** ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 44

Risposta A:	1.10%	Risposte giuste:	35.05%
Risposta B:	35.05%	Risposte errate:	5.16%
Risposta C:	4.07%	Risposte non date:	59.78%
Risposta D:	10.33%		
Risposta E:	44.29%		

45. Un numero razionale compreso tra $\sqrt{5}$ e $\sqrt{8}$ è:

- A. 2,52
- B. 1,98
- C. 3,01
- D. $(\sqrt{5})(\sqrt{8})/2$
- E. $(\sqrt{5} + \sqrt{8})/2$

Soluzione

Cominciamo con l'osservare che le risposte D ed E non possono essere vere in quanto $(\sqrt{5})(\sqrt{8})/2$ e $(\sqrt{5} + \sqrt{8})/2$ non sono numeri razionali. La risposta C non può essere vera in quanto

$$\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3 < 3,01$$

La risposta B non può essere vera in quanto

$$1,98 < 2 = \sqrt{4} < \sqrt{5}$$

Esaminiamo la risposta A. Dovrebbe risultare

$$\sqrt{5} < 2,52 < \sqrt{8}$$

e ciò è vero come si vede elevando tutti i membri della disuguaglianza al quadrato (ricordiamo che la disuguaglianza si mantiene in quanto sono tutti numeri positivi)

$$5 < 6,3504 < 8$$

Concludiamo che **la risposta esatta è la A.**



Risultati percentuali relativi al quesito 45

Risposta A:	34.59%	Risposte giuste:	34.59%
Risposta B:	3.13%	Risposte errate:	18.31%
Risposta C:	4.23%	Risposte non date:	47.10%
Risposta D:	2.03%		
Risposta E:	37.72%		

46. L'espressione

$$\left(\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}\right)^2$$

è anche uguale a:

- A. $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$
- B. $\frac{3}{2}$
- C. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
- D. $\frac{1}{2}$
- E. 1

Soluzione

Sviluppiamo l'espressione assegnata secondo la formula del quadrato di un binomio

$$\left(\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}\right)^2 = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} - 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$$

Poi utilizzando la prima relazione fondamentale della trigonometria:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

e la formula di duplicazione del seno:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

otteniamo che

$$\left(\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}\right)^2 = 1 - \sin \frac{\pi}{6}$$

Poiché $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ricaviamo che

$$\left(\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Pertanto **la risposta esatta è la D.**

In alternativa, osservando che $\sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{1}{2} \frac{\pi}{6}$, avremmo potuto anche utilizzare le formule di bisezione del seno e del coseno:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \qquad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

per calcolare esplicitamente

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

Quindi l' espressione assegnata si calcola come segue

$$\begin{aligned}\left(\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}\right)^2 &= \left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} - \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}\right)^2 = \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{4} + \frac{2+\sqrt{3}}{4} - 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \\ &= 1 - 2\sqrt{\frac{4-3}{16}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Risultati percentuali relativi al quesito 46

Risposta A:	8.29%	Risposte giuste:	6.42%
Risposta B:	3.29%	Risposte errate:	72.14%
Risposta C:	2.82%	Risposte non date:	21.44%
Risposta D:	6.42%		
Risposta E:	7.04%		

47. Una sfera è inscritta in un cubo; il rapporto tra il volume della sfera e quello del cubo è:

- A. $\frac{\pi}{4}$
- B. $\frac{\pi}{6}$
- C. $\frac{2\pi}{3}$
- D. $\frac{4\pi}{3}$
- E. $\frac{\pi}{2}$

Soluzione

Se una sfera è inscritta in un cubo, la lunghezza del suo diametro è pari allo spigolo del cubo. Ricordiamo che il volume della sfera di raggio r è dato dalla formula

$$V_s = \frac{4}{3}\pi r^3$$

mentre il volume di un cubo il cui spigolo misura l è dato dalla formula

$$V_c = l^3$$

Dovendo essere $l = 2r$ ricaviamo che

$$\frac{V_s}{V_c} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{(2r)^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{8} = \frac{\pi}{6}$$

Pertanto **la risposta esatta è la B.**



Risultati percentuali relativi al quesito 47

Risposta A:	4.54%	Risposte giuste:	19.87%
Risposta B:	19.87%	Risposte errate:	48.51%
Risposta C:	9.70%	Risposte non date:	31.61%
Risposta D:	12.99%		
Risposta E:	4.38%		

48. Un triangolo equilatero è inscritto in una circonferenza; il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il perimetro del triangolo è:

- A. $\frac{4\pi}{3}$
- B. $\frac{\pi}{3}$
- C. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$
- D. $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$
- E. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Soluzione

Detto r il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo equilatero, si ricava che il lato del triangolo misura $r\sqrt{3}$. Infatti ogni lato del triangolo equilatero è una corda della circonferenza circoscritta e insiste su un angolo di 60° . Il teorema della corda implica che il lato del triangolo inscritto è pari alla misura del diametro per il seno dell'angolo su cui la corda insiste e cioè:

$$2r \sin 60^\circ = 2r \frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$$

Allora ricordando che la circonferenza misura $2\pi r$ e il perimetro misura $3r\sqrt{3}$, troviamo

$$\frac{2\pi r}{3r\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

Quindi **la risposta esatta è la D.**



Risultati percentuali relativi al quesito 48

Risposta A:	4.54%	Risposte giuste:	7.51%
Risposta B:	6.26%	Risposte errate:	72.61%
Risposta C:	2.19%	Risposte non date:	19.87%
Risposta D:	7.51%		
Risposta E:	6.89%		

49. L'equazione in campo reale $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ ha:
- A. due soluzioni positive e nessuna soluzione negativa
 - B. nessuna soluzione
 - C. una soluzione positiva e una negativa
 - D. due soluzioni negative e nessuna soluzione positiva
 - E. due soluzioni positive e due soluzioni negative

Soluzione

L'equazione assegnata è di tipo biquadratico, cioè il trinomio in x a primo membro può essere trasformato in un trinomio di secondo grado mediante una opportuna sostituzione. Nel caso in esame la sostituzione che va effettuata è la seguente:

$$x^2 = t$$

In tal modo siamo ricondotti a studiare le (eventuali) soluzioni dell'equazione di secondo grado nell'incognita t

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

Si vede facilmente che le soluzioni sono date da

$$t_1 = -4 \qquad t_2 = 1$$

(basta usare la nota formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado). Osserviamo poi che $t_1 = -4$ non è accettabile, in quanto $t = x^2$ nel campo reale è necessariamente una quantità non negativa. In corrispondenza della soluzione $t_2 = 1$ troviamo

$$x = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$

e dunque **la risposta esatta è la C.**



Risultati percentuali relativi al quesito 49

Risposta A:	8.76%	Risposte giuste:	42.25%
Risposta B:	3.91%	Risposte errate:	20.97%
Risposta C:	42.25%	Risposte non date:	36.78%
Risposta D:	1.72%		
Risposta E:	22.38%		

50. L'equazione $x^2 - 3|x| + 2 = 0$ ha:

- A. quattro soluzioni
- B. tre soluzioni
- C. due soluzioni
- D. una sola soluzione
- E. nessuna soluzione

Soluzione

Abbiamo già ricordato che il valore assoluto di x è definito come segue:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione assegnata si troveranno unendo le soluzioni dei due sistemi seguenti:

$$\text{i) } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo esplicitamente otteniamo che

$$\text{i) } \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 2 \vee x = 1 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} x < 0 \\ x = -1 \vee x = -2 \end{cases}$$

e concludiamo che **la risposta esatta è la A.**



NOTA In alternativa avremmo potuto osservare che

$$|x|^2 = x^2$$

e dunque che l'equazione assegnata è equivalente alla seguente

$$|x|^2 - 3|x| + 2 = 0$$

che è risolta se

$$|x| = 1 \vee |x| = 2$$

Dalla definizione di valore assoluto ricaviamo quindi che

$$x = \pm 1 \vee x = \pm 2$$

e cioè che la risposta esatta è la A.

Risultati percentuali relativi al quesito 50

Risposta A:	33.96%	Risposte giuste:	33.96%
Risposta B:	2.03%	Risposte errate:	18.47%
Risposta C:	39.75%	Risposte non date:	47.57%
Risposta D:	4.23%		
Risposta E:	1.56%		

51. L'equazione $\cos^2 x - \cos x - 2 \geq 0$ è verificata per:

- A. nessun valore reale di x
- B. $x = \pi + 2k\pi$ per ogni k intero
- C. $x = 2k\pi$ per ogni k intero
- D. qualunque valore reale di x
- E. $x = 3k\pi$ per ogni k intero

Soluzione

Con la posizione $t = \cos x$, la disequazione assegnata si trasforma nella seguente disequazione di secondo grado nell'incognita t

$$t^2 - t - 2 \geq 0,$$

che è verificata per valori uguali alle radici o esterni all'intervallo delle radici (ricordiamo che il primo coefficiente ha segno concorde con il verso della disequazione). La formula di risoluzione di una equazione di secondo grado ci consente di determinare le radici come segue

$$t = \frac{1 \mp \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \mp 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ +2 \end{cases}$$

Pertanto la disequazione è soddisfatta o per $t \leq -1$ o per $t \geq 2$. Ricordiamo adesso che $t = \cos x$ e dunque la disequazione assegnata è verificata se

$$\cos x \leq -1 \quad \text{oppure} \quad \cos x \geq 2$$

Poiché la funzione $\cos x$ assume valori nell'intervallo $[-1, 1]$ vediamo che la disequazione $\cos x \geq 2$ non è verificata per nessun valore di x , mentre la disequazione $\cos x \leq -1$ è verificata solo se $\cos x = -1$ e cioè se $x = (2k+1)\pi$, quindi **la risposta esatta è la B.** ✓

NOTA In alternativa si può osservare che il primo membro della disuguaglianza data si può scomporre nella forma

$$\cos^2 x - \cos x - 2 = (\cos x - 2)(\cos x + 1)$$

quindi la disuguaglianza data diventa:

$$(\cos x - 2)(\cos x + 1) \geq 0$$

Siccome il primo fattore è sempre negativo per ogni valore di x , visto che il coseno oscilla fra i valori $+1$ e -1 , mentre il secondo membro è sempre non negativo per ogni x , la possibilità che la disuguaglianza sia soddisfatta si ha solo se $\cos x = -1$; questo fatto si verifica per tutti i multipli dispari di π : $x = (2k+1)\pi$, quindi la risposta esatta è la **B.**

Risultati percentuali relativi al quesito 51

Risposta A:	17.21%	Risposte giuste:	23.79%
Risposta B:	23.79%	Risposte errate:	44.29%
Risposta C:	5.48%	Risposte non date:	31.92%
Risposta D:	7.51%		
Risposta E:	1.72%		

52. Un foglio di carta di forma quadrata viene piegato in due parti uguali in modo da formare due rettangoli sovrapposti. Sapendo che il perimetro del rettangolo è di 12 cm, qual è l'area del quadrato originario?

- A. 9 cm^2
- B. 36 cm^2
- C. 24 cm^2
- D. 72 cm^2
- E. 16 cm^2

Soluzione

Poiché piegando il foglio di carta quadrato si vogliono ottenere due rettangoli uguali, esso dovrà essere piegato a metà lungo l'asse di uno qualsiasi dei lati, non lungo una diagonale, perché questa piega darebbe luogo a due triangoli sovrapposti.

Il rettangolo ottenuto con la piega lungo l'asse di uno dei lati ha quindi due lati opposti lunghi quanto il lato del quadrato iniziale e gli altri due lati opposti pari a metà del lato del quadrato. Detto l il lato del quadrato il perimetro p di ciascun rettangolo è perciò pari $p = 2l + 2 \frac{l}{2} = 3l$. Siccome detto perimetro è di 12 cm ne segue che il lato del quadrato iniziale era di 4 cm, quindi la sua area è di 16 cm^2 e **la risposta esatta è la E.**



Risultati percentuali relativi al quesito 52

Risposta A:	2.35%	Risposte giuste:	72.93%
Risposta B:	12.68%	Risposte errate:	5.16%
Risposta C:	5.95%	Risposte non date:	21.91%
Risposta D:	0.94%		
Risposta E:	72.93%		

53. Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy , consideriamo i punti $A = (1,0)$ e $B = (0,2)$. Per quale scelta del punto C il triangolo ABC **non** è rettangolo?
- A. $C = (0, -1/2)$
 - B. $C = (-1,0)$
 - C. $C = (1,2)$
 - D. $C = (-4,0)$
 - E. $C = (0,0)$

Soluzione

Siano $C_1 = (0, -1/2)$, $C_2 = (-1, 0)$, $C_3 = (1, 2)$, $C_4 = (-4, 0)$ e $C_5 = (0, 0)$ i cinque punti da usare come terzo vertice del triangolo di cui A e B sono gli altri due vertici. I punti C_3 e C_5 possono essere subito scartati in quanto il triangolo AC_5B ha due lati sugli assi coordinati (che sono ovviamente perpendicolari) e dunque è rettangolo e il triangolo AC_3B è il simmetrico di AC_5B rispetto alla retta che contiene il segmento AB e dunque è anche esso rettangolo. Ricordiamo a questo punto che il coefficiente angolare della retta che passa per due punti assegnati di coordinate (x_1, y_1) , (x_2, y_2) è dato dalla formula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e che due rette di coefficienti angolari m e m' sono perpendicolari se è soddisfatta la condizione

$$mm' = -1.$$

Facilmente calcoliamo

$$m_{AB} = -2$$

$$m_{AC_1} = \frac{1}{2}$$

Quindi il punto C_1 deve essere scartato in quanto i lati AB e AC_1 appartengono a rette perpendicolari. Poiché

$$m_{BC_4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

anche il punto C_4 deve essere scartato in quanto i lati AB e BC_4 appartengono a rette perpendicolari. Infine poiché

$$m_{BC_2} = 2$$

la retta che contiene BC_2 non è perpendicolare alla retta che contiene AB e il segmento AC_2 appartiene all'asse delle ascisse concludiamo che **la risposta esatta è la B.** ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 53

Risposta A:	12.52%	Risposte giuste:	66.82%
Risposta B:	66.82%	Risposte errate:	6.42%
Risposta C:	4.85%	Risposte non date:	26.76%
Risposta D:	7.20%		
Risposta E:	2.19%		

54. L'equazione $|x - 1| = 1 - |x|$ ha
- A. esattamente due soluzioni
 - B. esattamente tre soluzioni
 - C. esattamente quattro soluzioni
 - D. infinite soluzioni
 - E. nessuna soluzione

Soluzione

Ricordiamo che il valore assoluto di un numero reale y è definito come segue:

$$|y| = \begin{cases} y & \text{se } y \geq 0 \\ -y & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

Pertanto se $x \in [0, 1]$ si avrà che

$$|x - 1| = 1 - x \quad \text{e} \quad |x| = x$$

Di conseguenza se $x \in [0, 1]$ l'equazione assegnata si può riscrivere come segue

$$1 - x = 1 - x$$

che è chiaramente una identità, cioè un'uguaglianza verificata per ogni x nell'intervallo $[0, 1]$.

Quindi **la risposta esatta è la D.**



Risultati percentuali relativi al quesito 54

Risposta A:	40.53%	Risposte giuste:	10.33%
Risposta B:	5.32%	Risposte errate:	26.92%
Risposta C:	5.63%	Risposte non date:	62.75%
Risposta D:	10.33%		
Risposta E:	11.27%		

55. Per quali x reali è verificata la disequazione $\sqrt{x^2 - 1} > 2x$?

- A. $x \geq -1$
- B. $x \leq -1$
- C. $-1 < x < 1$
- D. per nessun x reale
- E. $x \geq 1$

Soluzione

Le soluzioni della disequazione irrazionale assegnata sono date dall'unione delle soluzioni dei due sistemi seguenti:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 > 4x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

Si ricordi che la funzione $y \rightarrow \sqrt{y}$ è definita per $y \in [0, +\infty)$, assume valori in $[0, +\infty)$ ed è crescente in tutto il suo insieme di definizione. Il primo sistema utilizza la monotonia della funzione radice quadrata nell'intervallo $[0, +\infty)$, il secondo utilizza il fatto che la funzione (quando è definita) è non negativa. Quindi

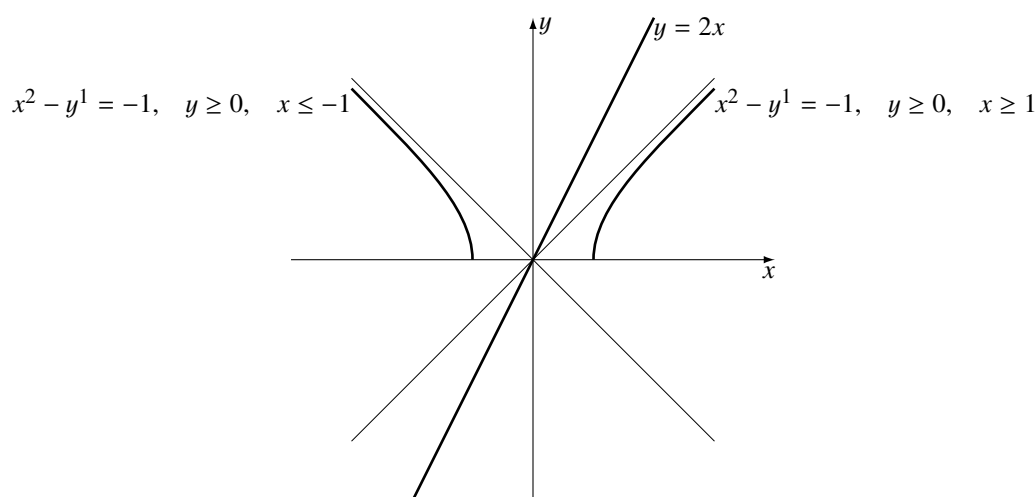
$$\begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ 3x^2 + 1 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

Il primo sistema non ammette soluzioni in quanto la seconda disequazione non è mai verificata. Il secondo sistema è risolto per $x \leq -1$ e quindi **la risposta esatta è la B.** ✓

NOTA Sempre ricordando che la funzione $y \rightarrow \sqrt{y}$ è definita per $y \in [0, +\infty)$, assume valori in $[0, +\infty)$, si può usare un approccio geometrico e si possono disegnare il primo membro e il secondo membro della disuguaglianza in esame. Il primo membro equivale a

$$\begin{cases} x^2 - 1 = y^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

e rappresenta la metà superiore dei due rami di iperbole $x^2 - y^2 = -1$. Il secondo membro rappresenta semplicemente la retta $y = 2x$. La disuguaglianza proposta richiede di discutere e di determinare per quali intervalli della variabile x le ordinate del primo membro sono superiori alle ordinate del secondo membro. Questi due luoghi di punti sono disegnati nella figura che segue dove sono evidenziati anche gli asintoti dell'iperbole formati dalle bisettrici dei quadranti.



La figura mostra chiaramente che solo le ordinate del ramo di iperbole che giace nel secondo quadrante sono sempre superiori alle ordinate della retta; quindi la risposta esatta è proprio la **B** come si è ricavato sopra ricorrendo alle discussioni delle disequazioni.

Risultati percentuali relativi al quesito 55

Risposta A:	2.82%	Risposte giuste:	25.51%
Risposta B:	25.51%	Risposte errate:	18.31%
Risposta C:	9.70%	Risposte non date:	56.18%
Risposta D:	33.18%		
Risposta E:	10.49%		

56. Aldo, Bea, Carlo, Dario, Ebe, Franco vanno in treno e trovano uno scompartimento a sei posti libero. Considerando che Aldo e Bea devono stare vicino al finestrino, quanti modi diversi hanno i sei amici di disporsi nello scompartimento?

- A. 48
- B. 4
- C. 240
- D. 8
- E. 10

Soluzione

Visto che Aldo e Bea possono sistemarsi in due soli modi diversi, restano i modi diversi in cui possono sistemarsi gli altri quattro amici negli altri quattro posti.

Se si conosce la formula delle permutazioni di n persone, si sa che queste sono il fattoriale di n e, con $n = 4$, sono esattamente $24 = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$; e in totale, quindi le permutazioni dei sei amici con il vincolo imposto dalla vicinanza al finestrino di Aldo e Bea sono 48.

Che le permutazioni di quattro persone su 4 sedili siano 24 si può ricavare anche senza conoscere le formule apposite. Prendiamo la prima persona, Carlo: essa ha quattro sedili da scegliere per sedersi, quindi ci sono quattro modi diversi di disporsi; ma una volta seduto, Dario ha tre sedili liberi, e quindi ha tre modi diversi di disporsi; con ciò abbiamo già 12 modi diversi. Una volta seduto Dario, Ebe può scegliere fra due sedili ed ha due modi di disporsi, portando il numero totale a 24; Franco si può sedere nel solo posto rimasto libero e non ha nessuna scelta; i modi diversi di sedersi per i quattro amici sono proprio 24.

la risposta esatta è la A.



Risultati percentuali relativi al quesito 56

Risposta A:	49.77%	Risposte giuste:	49.77%
Risposta B:	5.48%	Risposte errate:	18.62%
Risposta C:	4.38%	Risposte non date:	31.61%
Risposta D:	10.64%		
Risposta E:	11.11%		

57. In un paese in cui ogni cittadino è tenuto a pagare in tasse il 25% del proprio reddito, un anno l'aliquota viene abbassata al 20%. Viene però contestualmente introdotta una tassa "una tantum" di 1000 € che ogni contribuente è tenuto a pagare. Si può dire che in quello stesso anno, in rapporto a questa operazione:
- A. i cittadini con un reddito superiore a 25 000 € hanno dovuto pagare un importo maggiorato di un quinto rispetto a quello che avrebbero dovuto pagare secondo le norme dell'anno precedente
 - B. il peso fiscale è rimasto invariato per tutti
 - C. solo i cittadini con un reddito superiore a 10 000 € sono stati avvantaggiati
 - D. i cittadini con un reddito superiore a 25 000 € sono stati avvantaggiati
 - E. solo i cittadini con un reddito inferiore a 20 000 € sono stati avvantaggiati

Soluzione

Poniamo x il reddito di ciascun contribuente; prima della riforma egli pagava $0,25x$ di tasse, mentre dopo la riforma egli ne paga $0,20x + 1000$ €.

Determiniamo allora il reddito per il quale le due tassazioni sono uguali risolvendo l'equazione di primo grado:

$$0,25x = 0,20x + 1000$$

La soluzione è $x = 20\,000$ €; è facile controllare che i contribuenti con redditi inferiori pagano di più di prima, mentre quelli con redditi superiori pagano di meno.

Visto che chi ha un reddito di 25 000€ ha un reddito superiore a 20 000€, paga di meno e pertanto **la risposta esatta è la D.** ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 57

Risposta A:	5.48%	Risposte giuste:	50.70%
Risposta B:	1.72%	Risposte errate:	30.83%
Risposta C:	6.73%	Risposte non date:	18.47%
Risposta D:	50.70%		
Risposta E:	4.54%		

58. Rispetto ad un riferimento cartesiano ortogonale Oxy del piano, l'equazione

$$(x - 1)^2 - y^2 = 0$$

individua:

- A. due rette incidenti
- B. una parabola
- C. due soli punti
- D. una circonferenza
- E. due rette parallele

Soluzione

L'equazione data, grazie al prodotto notevole $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, si può scomporre in:

$$(x - 1 + y)(x - 1 - y) = 0$$

Questa espressione descrive i luoghi dei punti che rendono nullo il primo o il secondo fattore; abbiamo quindi due luoghi da esaminare:

$$x - 1 + y = 0$$

$$x - 1 - y = 0$$

Entrambe le equazioni rappresentano rette, precisamente due rette perpendicolari inclinate di $\pm 45^\circ$ rispetto all'asse delle ascisse e passanti per il punto di coordinate $(1, 0)$. Pertanto **la risposta esatta è la A.** ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 58

Risposta A:	11.89%	Risposte giuste:	11.89%
Risposta B:	21.28%	Risposte errate:	25.35%
Risposta C:	2.82%	Risposte non date:	62.75%
Risposta D:	34.90%		
Risposta E:	3.76%		

59. Una quantità di liquido che riempie una sfera di raggio K viene travasata in cilindri aventi diametro di base K ed altezza K . Qual è il numero minimo di cilindri che occorrono per compiere questa operazione?

- A. 5
- B. 6
- C. 3
- D. 9
- E. 4

Soluzione

La sfera ha un volume pari a $V_s = \frac{4}{3}\pi K^3$ mentre ogni cilindro, che ha il raggio di base pari a $K/2$, ha il volume $V_c = \frac{\pi}{4}K^3$

Il rapporto tra il volume della sfera e quello del cilindro è

$$\frac{V_s}{V_c} = \frac{4/3}{1/4} = \frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3}$$

Ne segue che per travasare il liquido dalla sfera ai cilindri occorrono più di 5 cilindri, quindi il numero minimo di cilindri necessari ad eseguire il travaso è 6.

Pertanto **la risposta esatta è la B.** ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 59

Risposta A:	5.48%	Risposte giuste:	17.68%
Risposta B:	17.68%	Risposte errate:	40.38%
Risposta C:	20.03%	Risposte non date:	41.94%
Risposta D:	2.97%		
Risposta E:	13.46%		

60. In un gruppo di 100 persone 51 parlano inglese, 36 francese, delle quali 12 sia inglese che francese. Quante di loro non parlano né inglese né francese?

- A. 49
- B. 15
- C. 29
- D. 13
- E. 25

Soluzione

Siccome 12 persone parlano sia l'inglese sia il francese, vanno contate una sola volta ai fini di determinare coloro che non parlano né inglese né francese. Quindi $51 - 12$ parlano solo inglese; $36 - 12$ parlano solo francese e 12 parlano sia l'inglese che il francese; in totale $51 - 12 + 36 - 12 + 12 = 75$ persone parlano o l'inglese o il francese o entrambe; le rimanenti 25 persone non parlano né inglese né francese.

Pertanto **la risposta esatta è la E.**



Risultati percentuali relativi al quesito 60

Risposta A:	0.47%	Risposte giuste:	32.71%
Risposta B:	2.03%	Risposte errate:	4.07%
Risposta C:	0.47%	Risposte non date:	63.22%
Risposta D:	60.25%		
Risposta E:	32.71%		

61. In un piano cartesiano, quale delle seguenti rette è parallela alla retta passante per i punti di coordinate (1,0) e (0,1) ?
- A. $2x + 3y = 0$
 - B. $x = y - 1$
 - C. $x = 2$
 - D. $x + y = 3$
 - E. $y = 1$

Soluzione

Assegnati due punti $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, nel piano cartesiano, il coefficiente angolare della retta che passa per entrambi è dato da

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Pertanto il coefficiente angolare della retta che passa per i punti di coordinate (1,0) e (0,1) è :

$$\frac{1 - 0}{0 - 1} = -1.$$

Poiché la condizione di parallelismo di due rette nel piano cartesiano afferma che due rette sono parallele se e solo se i loro coefficienti angolari coincidono, dobbiamo cercare tra le rette assegnate quella che ha coefficiente angolare -1 . Data una retta di equazione $ax + by + c = 0$ il suo coefficiente angolare è dato da $-\frac{a}{b}$. Tra le risposte date, la retta $x + y = 3$ ha coefficiente angolare -1 e dunque **la risposta esatta è la D.** ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 61

Risposta A:	5.96%	Risposte giuste:	50.40%
Risposta B:	16.02%	Risposte errate:	27.83%
Risposta C:	2.16%	Risposte non date:	21.77%
Risposta D:	50.40%		
Risposta E:	3.69%		

62. In un piano cartesiano, quale dei seguenti punti è interno al triangolo racchiuso tra le tre rette $r_1 : y = 0$, $r_2 : y = 2x$, $r_3 : y = -x + 7$?

- A. $P = (3,5)$
- B. $P = (4,4)$
- C. $P = (1, -3)$
- D. $P = (3,3)$
- E. $P = (-3,2)$

Soluzione

Il triangolo delimitato dalle tre rette assegnate ha vertici nei punti (0,0), (7,0) e $(\frac{7}{3}, \frac{14}{3})$, in quanto

$$\begin{aligned}\begin{cases} y = 2x \\ y = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -x + 7 \\ y = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 7 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 3x = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 14/3 \\ x = 7/3 \end{cases}\end{aligned}$$

Quindi il triangolo giace nel primo quadrante e pertanto ogni punto al suo interno deve avere sia ascissa che ordinata positive. Dunque scartiamo le risposte A ed E. Poiché i punti P(x,y) interni al triangolo devono essere compresi tra le rette r_2 e r_3 , allora le loro coordinate devono essere tali che

$$0 < y < -x + 7.$$

Poiché i punti assegnati nelle risposte A e B non soddisfano tali disequazioni, **la risposta esatta è la D.** ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 62

Risposta A:	5.71%	Risposte giuste:	48.74%
Risposta B:	2.27%	Risposte errate:	15.15%
Risposta C:	3.37%	Risposte non date:	36.11%
Risposta D:	48.74%		
Risposta E:	3.78%		

63. A parità di tutte le altre condizioni (materiale, rugosità, stato di pulizia, ecc.) serve meno quantità di pittura per tinteggiare:

- A. un cono (circolare retto) di altezza 1 metro e base di raggio 1 metro
- B. una sfera di raggio 1 metro
- C. un cubo di lato 1 m
- D. una piramide avente tutte le facce che sono triangoli equilateri (tetraedro) di lato 1 metro
- E. un cilindro (circolare retto) di raggio 1 metro e di altezza 1 metro

Soluzione

Bisogna calcolare la superficie totale dei solidi assegnati. Ricordiamo che

$$S_T(\text{cono}) = S_B(\text{cono}) + S_L(\text{cono})$$

ma

$$S_B(\text{cono}) = \pi r^2 = \pi$$

e

$$S_L(\text{cono}) = \frac{1}{2} P_B \cdot A$$

dove P_B denota il perimetro di base e A denota l'apotema. Il perimetro è dato da $P_B = 2\pi r = 2\pi$ e l'apotema $A = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ per il teorema di Pitagora. Quindi

$$S_T(\text{cono}) = \pi + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

Per quanto riguarda la sfera abbiamo

$$S_T(\text{sfera}) = 4\pi r^2 = 4\pi$$

La superficie totale del cubo è 6 volte la superficie di una sua faccia. Quindi

$$S_T(\text{cubo}) = 6l^2 = 6$$

La superficie totale del tetraedro è 4 volte la superficie di una sua faccia. Quindi

$$S_T(\text{tetraedro}) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l^2 = 2\sqrt{3}$$

Abbiamo inoltre che

$$S_T(\text{cilindro}) = 2S_B(\text{cilindro}) + S_L(\text{cilindro}) = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi + 2\pi = 4\pi$$

Confrontando i risultati ottenuti deduciamo che **la risposta esatta è la D.**



Risultati percentuali relativi al quesito 63

Risposta A:	13.53%	Risposte giuste:	13.94%
Risposta B:	15.03%	Risposte errate:	42.61%
Risposta C:	8.96%	Risposte non date:	43.44%
Risposta D:	13.94%		
Risposta E:	5.09%		

64. Si ha $\sqrt[3]{x^3 + 8} < 0$

- A. se e solo se $x < -1$
- B. per nessun valore reale di x
- C. se e solo se $x < -2$
- D. se e solo se $x < 0$
- E. se e solo se $x < 1$

Soluzione

Poiché la funzione $y = \sqrt[3]{x}$ è strettamente crescente su tutto l'insieme dei numeri reali, la disequazione proposta è equivalente alla seguente

$$x^3 + 8 < 0,$$

e quindi equivalente a

$$x^3 < -8 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 < (-2)^3.$$

Usando di nuovo che la funzione $y = \sqrt[3]{x}$ è strettamente crescente su tutto l'insieme dei numeri reali, otteniamo che

$$x < -2.$$

Pertanto **la risposta esatta è la C**. Alternativamente, utilizzando la scomposizione in fattori della somma di due cubi, abbiamo che ✓

$$x^3 + 8 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 2)(x^2 - 2x + 4) < 0.$$

Poiché il trinomio $x^2 - 2x + 4$ è positivo per ogni valore della x , in quanto il suo discriminante è negativo ($\Delta = -3$), la disequazione è soddisfatta se e solo se $x + 2 < 0$.

Risultati percentuali relativi al quesito 64

Risposta A:	1.92%	Risposte giuste:	59.73%
Risposta B:	14.42%	Risposte errate:	20.92%
Risposta C:	59.73%	Risposte non date:	19.36%
Risposta D:	3.23%		
Risposta E:	1.35%		

65. Avendo un triangolo equilatero A di lato a ed un triangolo equilatero B di lato $2a$ si ha che la superficie di B risulta:

- A. maggiore di quella di A ma comunque minore di quella del doppio di A
- B. quadrupla di quella di A
- C. maggiore del quadruplo di quella di A
- D. doppia di quella di A
- E. non deducibile da quella di A

Soluzione

Ricordiamo che in triangoli simili le aree stanno tra loro come i quadrati di due lati corrispondenti. Poiché due triangoli equilateri sono simili per il primo criterio di similitudine, sussiste la seguente proporzione

$$\text{Area}(B) : \text{Area}(A) = (2a : a)^2$$

e cioè

$$\frac{\text{Area}(B)}{\text{Area}(A)} = 4$$

Dunque **la risposta esatta è la B.**



Risultati percentuali relativi al quesito 65

Risposta A:	5.09%	Risposte giuste:	43.17%
Risposta B:	43.17%	Risposte errate:	41.43%
Risposta C:	3.98%	Risposte non date:	15.40%
Risposta D:	30.79%		
Risposta E:	1.56%		



66. Un angolo misura 2 radianti, quindi

- A. il suo seno è positivo
- B. il suo seno e il suo coseno hanno lo stesso segno
- C. l'angolo è acuto
- D. la sua tangente non esiste
- E. il suo coseno è positivo

Soluzione

L'angolo che misura 2 radianti è compreso tra gli angoli che misurano $\frac{\pi}{2}$ e π radianti, cioè

$$\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$$

Quindi rappresentato su una circonferenza goniometrica, esso cade nel II quadrante e il suo seno è positivo. Dunque **la risposta esatta è la A.**



Risultati percentuali relativi al quesito 66

Risposta A:	16.67%	Risposte giuste:	16.67%
Risposta B:	8.31%	Risposte errate:	31.25%
Risposta C:	5.16%	Risposte non date:	52.08%
Risposta D:	4.08%		
Risposta E:	13.69%		



67. La somma degli angoli interni di un esagono non regolare

- A. è uguale a cinque angoli piatti
- B. non è calcolabile senza ulteriori dati
- C. è uguale a 4π radianti
- D. è uguale a 360 gradi
- E. è uguale a 6 angoli retti

Soluzione

La somma degli angoli interni di un poligono vale tanti angoli piatti quanto è il numero dei suoi lati meno 2. Poiché un angolo piatto misura π radianti, la somma degli angoli interni di un esagono vale 4π . Dunque **la risposta esatta è la C.**



Risultati percentuali relativi al quesito 67

Risposta A:	3.82%	Risposte giuste:	26.11%
Risposta B:	12.03%	Risposte errate:	36.82%
Risposta C:	26.11%	Risposte non date:	37.06%
Risposta D:	16.17%		
Risposta E:	4.80%		



68. Dato un numero reale x , la seguente relazione $\frac{2^x \cdot 2}{\sqrt{4^{x+1}}}$ vale:

- A. $\frac{1}{2^x}$
- B. 0
- C. $\frac{1}{2}$
- D. 2
- E. 1

Soluzione

Ricordiamo che il prodotto di potenze che hanno la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti. Pertanto

$$\frac{2^x \cdot 2}{\sqrt{4^{x+1}}} = \frac{2^{x+1}}{\sqrt{4^{x+1}}}$$

Inoltre

$$4^{x+1} = (2^2)^{x+1} = 2^{2(x+1)}$$

e quindi

$$\frac{2^x \cdot 2}{\sqrt{4^{x+1}}} = \frac{2^{x+1}}{\sqrt{4^{x+1}}} = \frac{2^{x+1}}{\sqrt{2^{2(x+1)}}} = \frac{2^{x+1}}{\sqrt{(2^{x+1})^2}} = \frac{2^{x+1}}{2^{x+1}} = 1$$

Dunque **la risposta esatta è la E.**



Risultati percentuali relativi al quesito 68

Risposta A:	5.07%	Risposte giuste:	47.99%
Risposta B:	3.20%	Risposte errate:	17.71%
Risposta C:	4.69%	Risposte non date:	34.30%
Risposta D:	4.75%		
Risposta E:	47.99%		



69. In un piano cartesiano, la circonferenza di centro C di coordinate (1,1) e tangente all'asse delle x ha equazione
- A. $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$
 - B. $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$
 - C. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
 - D. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$
 - E. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 1$

Soluzione

La circonferenza di centro (1,1) è tangente all'asse delle x se il suo raggio misura 1. Pertanto l'equazione della circonferenza è

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

Dunque **la risposta esatta è la C.**



Risultati percentuali relativi al quesito 69

Risposta A:	3.98%	Risposte giuste:	25.26%
Risposta B:	3.40%	Risposte errate:	24.33%
Risposta C:	25.26%	Risposte non date:	50.41%
Risposta D:	7.21%		
Risposta E:	9.75%		

70. Dato un qualunque numero reale positivo x , allora $\log(x^3) - \log(x^2)$ è uguale a
- A. $\log(x^5)$
 - B. $\frac{\log(x^3)}{\log(x^2)}$
 - C. $\log(x)$
 - D. 0
 - E. $\log(x^3 - x^2)$

Soluzione

Ricordiamo le seguenti proprietà dei logaritmi:

$$\log_a(b^n) = n \log_a(b) \quad \forall a, b > 0 \ a \neq 1$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c) \quad \forall a, b, c > 0 \ a \neq 1$$

Usando la prima proprietà abbiamo che

$$\log(x^3) - \log(x^2) = 3 \log(x) - 2 \log(x) = \log(x)$$

oppure, usando la seconda proprietà, si ottiene

$$\log(x^3) - \log(x^2) = \log\left(\frac{x^3}{x^2}\right) = \log(x)$$

Dunque **la risposta esatta è la C.**



Risultati percentuali relativi al quesito 70

Risposta A:	1.00%	Risposte giuste:	43.09%
Risposta B:	25.43%	Risposte errate:	39.41%
Risposta C:	43.09%	Risposte non date:	17.50%
Risposta D:	1.06%		
Risposta E:	11.93%		



71. Il polinomio $12a^2 - 18b^2$ è divisibile per

- A. $\sqrt{6}(a - b)$
- B. $\sqrt{2}a - \sqrt{3}b$
- C. $12a + 18b$
- D. $12a - 18b$
- E. $a - b$

Soluzione

Ricordiamo che la differenza di due quadrati si scompone nel prodotto della somma delle due basi per la loro differenza, cioè

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Quindi

$$12a^2 - 18b^2 = 6(2a^2 - 3b^2) = 6(\sqrt{2}a + \sqrt{3}b)(\sqrt{2}a - \sqrt{3}b)$$

e pertanto il binomio assegnato è divisibile per entrambi i binomi $\sqrt{2}a + \sqrt{3}b$ e $\sqrt{2}a - \sqrt{3}b$.
Dunque **la risposta esatta è la B.**



Risultati percentuali relativi al quesito 71

Risposta A:	6.61%	Risposte giuste:	23.06%
Risposta B:	23.06%	Risposte errate:	29.75%
Risposta C:	4.68%	Risposte non date:	47.19%
Risposta D:	11.91%		
Risposta E:	6.56%		



72. Le soluzioni dell'equazione trigonometrica

$$\sin x = \frac{1}{\sin x}$$

sono

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, per ogni valore intero di k
- B. nessuna delle altre risposte
- C. $x = \frac{k\pi}{2}$, per ogni valore intero di k
- D. $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, per ogni valore intero di k
- E. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, per ogni valore intero di k

Soluzione

Per ogni x tale che $\sin x \neq 0$, l'equazione assegnata è equivalente alla seguente

$$\sin^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \pm 1$$

Tale equazione ha soluzioni $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, per ogni valore intero di k . Dunque **la risposta esatta è la A.** ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 72

Risposta A:	19.23%	Risposte giuste:	19.23%
Risposta B:	6.10%	Risposte errate:	21.06%
Risposta C:	2.45%	Risposte non date:	59.71%
Risposta D:	1.71%		
Risposta E:	10.80%		

73. Mettere in ordine crescente i tre numeri 7 , $\sqrt{47}$, $\sqrt{3} + \sqrt{27}$

- A. $\sqrt{3} + \sqrt{27} < \sqrt{47} < 7$
- B. $\sqrt{47} < \sqrt{3} + \sqrt{27} < 7$
- C. $7 < \sqrt{47} < \sqrt{3} + \sqrt{27}$
- D. $7 < \sqrt{3} + \sqrt{27} < \sqrt{47}$
- E. $\sqrt{47} < 7 < \sqrt{3} + \sqrt{27}$

Soluzione

Ricordiamo che la funzione $y = x^2$ e la sua inversa $x = \sqrt{y}$ sono strettamente crescenti sull'intervallo $[0, +\infty)$. Quindi la relazione d'ordine tra i tre numeri assegnati sarà la stessa che sussiste tra i loro quadrati. Quindi poiché

$$(\sqrt{47})^2 = 47 \quad 7^2 = 49$$

e

$$(\sqrt{3} + \sqrt{27})^2 = (4\sqrt{3})^2 = 48$$

si ha

$$(\sqrt{47})^2 < (\sqrt{3} + \sqrt{27})^2 < 7^2$$

Da ciò deduciamo che

$$\sqrt{47} < \sqrt{3} + \sqrt{27} < 7$$

e dunque **la risposta esatta è la B.**



Risultati percentuali relativi al quesito 73

Risposta A:	46.42%	Risposte giuste:	18.54%
Risposta B:	18.54%	Risposte errate:	64.45%
Risposta C:	3.32%	Risposte non date:	17.01%
Risposta D:	5.51%		
Risposta E:	9.19%		



74. Sia γ una circonferenza e sia P un punto del piano interno a γ , diverso dal centro. Quante sono le circonferenze di centro P tangenti a γ ?

- A. 4
- B. 0
- C. 1
- D. 2
- E. 3

Soluzione

Tracciamo il diametro passante per il punto P e denotiamo con Q_1 e Q_2 i due punti che tale diametro individua su γ . Le due circonferenze di centro P e raggi rispettivamente PQ_1 e PQ_2 sono le due circonferenze di centro P e tangenti a γ . Dunque **la risposta esatta è la D.**



Risultati percentuali relativi al quesito 74

Risposta A:	1.49%	Risposte giuste:	10.80%
Risposta B:	13.97%	Risposte errate:	58.07%
Risposta C:	41.62%	Risposte non date:	31.13%
Risposta D:	10.80%		
Risposta E:	0.98%		



75. Se $f(x) = x^2 - x^3$ allora $f(x - 2)$ vale

- A. $x^2 - x^3 + 2$
- B. $(3 - x)(x - 2)^2$
- C. nessuna delle altre risposte
- D. $x^2 - x^3 - 2$
- E. $x^2 - 2 - x^3 + 2$

Soluzione

Per calcolare la funzione assegnata nel punto $x - 2$ dobbiamo sostituire alla variabile indipendente x il valore $x - 2$. Pertanto

$$f(x - 2) = (x - 2)^2 - (x - 2)^3$$

Mettendo il fattore $(x - 2)^2$ in evidenza otteniamo

$$f(x - 2) = (x - 2)^2[1 - (x - 2)] = (x - 2)^2(1 - x + 2) = (x - 2)^2(3 - x)$$

Dunque **la risposta esatta è la B.**



Risultati percentuali relativi al quesito 75

Risposta A:	3.15%	Risposte giuste:	11.48%
Risposta B:	11.48%	Risposte errate:	40.28%
Risposta C:	22.10%	Risposte non date:	48.24%
Risposta D:	10.66%		
Risposta E:	4.37%		



76. L'espressione

$$\log_{10} \sqrt[3]{x^2 + 1} \cdot \log_{10} 1000$$

vale

- A. $\log_{10} \frac{1000(x^2+1)}{3}$
- B. $\log_{10}(x^2 + 1)$
- C. $\log_{10} \sqrt[3]{x^2 + 1} + \log_{10} 1000$
- D. $\frac{1}{3} \log_{10}[1000(x^2 + 1)]$
- E. $\log_{10}(1000 \sqrt[3]{x^2 + 1})$

Soluzione

Ricordiamo che dalla definizione di logaritmo abbiamo che

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b \quad \forall a, b > 0 \quad a \neq 1 \quad (*)$$

quindi

$$\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$$

D'altra parte sussiste la seguente proprietà dei logaritmi

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b \quad \forall a, b > 0 \quad a \neq 1$$

Quindi

$$\log_{10} \sqrt[3]{x^2 + 1} = \log_{10} (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_{10} (x^2 + 1) \quad (**)$$

Tenendo conto delle uguaglianze (*) e (**), otteniamo

$$\log_{10} \sqrt[3]{x^2 + 1} \cdot \log_{10} 1000 = \frac{1}{3} \log_{10} (x^2 + 1) \cdot 3 = \log_{10} (x^2 + 1)$$

Dunque **la risposta esatta è la B.**



Risultati percentuali relativi al quesito 76

Risposta A:	2.31%	Risposte giuste:	19.31%
Risposta B:	19.31%	Risposte errate:	33.64%
Risposta C:	9.13%	Risposte non date:	47.05%
Risposta D:	11.59%		
Risposta E:	10.60%		



77. Il Circolo Canottieri Santerno è formato da sei rematori tutti ugualmente bravi e affiatati fra loro. Deve mandare una rappresentanza di quattro atleti al campionato regionale. In quanti modi diversi può essere formata una tale rappresentanza?

- A. 720
- B. 5
- C. 15
- D. 4
- E. 6

Soluzione

Ricordiamo che, dati n oggetti, il numero delle loro possibili combinazioni a gruppi formati da k ($k \geq 1$) oggetti è dato dalla seguente formula

$$C_{n;k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

dove $k! = k(k-1)(k-2) \cdots 2 \cdot 1$ se $k > 1$ e $k! = 1$ se $k = 1$. Il problema assegnato consiste nel determinare quanti gruppi di 4 atleti si possono formare partendo da un gruppo di 6 atleti. Quindi bisogna calcolare il numero delle combinazioni di 6 oggetti a gruppi di 4, cioè

$$C_{6;4} = \frac{6(6-1)(6-2)(6-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Dunque **la risposta esatta è la C.**



Risultati percentuali relativi al quesito 77

Risposta A:	12.61%	Risposte giuste:	33.93%
Risposta B:	2.13%	Risposte errate:	23.62%
Risposta C:	33.93%	Risposte non date:	42.45%
Risposta D:	2.97%		
Risposta E:	5.92%		

78. Per $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, l'equazione $\sqrt{3} \sin^2 x + \sqrt{3} \cos^2 x - 2 \sin x = 0$ ha soluzione

- A. $x = \frac{\pi}{3}$
- B. $x = \frac{\pi}{6}$
- C. $x = \frac{\pi}{4}$
- D. $x = 0$
- E. $x = \frac{\pi}{2}$

Soluzione

Ricordiamo la prima identità fondamentale della trigonometria

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

grazie alla quale l'equazione assegnata si riscrive nel modo seguente

$$\sqrt{3} \sin^2 x + \sqrt{3} \cos^2 x - 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} - 2 \sin x = 0$$

Pertanto dobbiamo cercare la soluzione dell'equazione

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Poiché $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, si ha che **la risposta esatta è la A.**



Risultati percentuali relativi al quesito 78

Risposta A:	18.06%	Risposte giuste:	18.06%
Risposta B:	5.71%	Risposte errate:	12.50%
Risposta C:	2.16%	Risposte non date:	69.44%
Risposta D:	2.72%		
Risposta E:	1.92%		

79. Date due sfere concentriche di raggio 1 e r (con $r < 1$) che valore deve assumere r affinché il volume della parte esterna alla sfera minore sia metà del volume della sfera maggiore?
- A. $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 B. $r = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$
 C. $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
 D. $r = \frac{1}{2}$
 E. $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Soluzione

Ricordiamo che il volume di una sfera di raggio r è dato dalla formula

$$V_r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Pertanto il volume della sfera di raggio 1 ha volume pari a

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi.$$

La parte esterna alla sfera di raggio minore avrà volume pari alla differenza dei due volumi appena calcolati e cioè

$$\frac{4}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(1 - r^3)$$

Imponiamo che tale parte abbia volume pari a metà della sfera maggiore

$$\frac{4}{3}\pi(1 - r^3) = \frac{1}{2} \frac{4}{3}\pi$$

$\Updownarrow$

$$1 - r^3 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Dunque **la risposta esatta è la C.**



Risultati percentuali relativi al quesito 79

Risposta A:	2.16%	Risposte giuste:	11.86%
Risposta B:	1.67%	Risposte errate:	16.68%
Risposta C:	11.86%	Risposte non date:	71.46%
Risposta D:	8.26%		
Risposta E:	4.60%		

80. Quale delle seguenti affermazioni vale per ogni coppia di polinomi $p(x)$ e $q(x)$ di grado 3 a coefficienti reali, con $p(x) \neq q(x)$?
- A. $p(x) + q(x)$ ha grado 6 e $p(x) \cdot q(x)$ ha grado ≤ 6
 - B. $p(x) + q(x)$ ha grado 3 e $p(x) \cdot q(x)$ ha grado 3
 - C. $p(x) + q(x)$ ha grado 6 e $p(x) \cdot q(x)$ ha grado ≤ 9
 - D. $p(x) + q(x)$ ha grado 3 e $p(x) \cdot q(x)$ ha grado ≤ 6
 - E. $p(x) + q(x)$ ha grado ≤ 3 e $p(x) \cdot q(x)$ ha grado 6

Soluzione

Un polinomio ha grado 3 se il coefficiente del monomio di grado 3 (che è il monomio di grado massimo) è diverso da 0. Quindi il prodotto dei due polinomi $p(x)$, $q(x)$ avrà il monomio di grado massimo dato dal prodotto dei due monomi di grado 3 e quindi avrà grado 6. La somma invece può avere grado ≤ 3 . Più precisamente ha grado 3 se i coefficienti dei monomi di grado 3 non sono opposti, grado < 3 se i coefficienti dei monomi di grado 3 sono opposti. Dunque **la risposta esatta è la E.** ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 80

Risposta A:	1.31%	Risposte giuste:	5.44%
Risposta B:	2.95%	Risposte errate:	15.66%
Risposta C:	2.26%	Risposte non date:	78.90%
Risposta D:	9.13%		
Risposta E:	5.44%		

81. L'equazione $x(x - a) = 1$ ha due soluzioni distinte
- A. se e solo se $a \geq 0$
 - B. se e solo se $-1 < a < 1$
 - C. per nessun valore reale di a
 - D. per tutti gli a reali
 - E. se e solo se $-2 < a < 2$

Soluzione

L'equazione assegnata si può riscrivere nel modo seguente

$$x^2 - ax - 1 = 0$$

Una equazione di 2° grado ha due soluzioni distinte se e solo se il suo discriminante è strettamente maggiore di 0. Il discriminante dell'equazione assegnata vale

$$\Delta = a^2 + 4$$

quindi è strettamente positivo per ogni valore di a . Quindi **la risposta esatta è la D.** ✓

In alternativa si può ragionare come segue: le soluzioni dell'equazione assegnata rappresentano le ascisse dei punti di intersezione tra la parabola di equazione $y = x^2 - ax$ e la retta di equazione $y = 1$. Poiché la parabola in questione ha vertice nel punto $(-\frac{a}{2}; -\frac{a^2}{4})$ che ha ordinata minore o uguale di 0 ed ha concavità rivolta verso l'alto, interseca necessariamente la retta $y = 1$ in due punti distinti.

Risultati percentuali relativi al quesito 81

Risposta A:	8.17%	Risposte giuste:	45.52%
Risposta B:	5.62%	Risposte errate:	25.46%
Risposta C:	6.86%	Risposte non date:	29.03%
Risposta D:	45.52%		
Risposta E:	4.80%		

82. L'equazione $\sin x = -x$

- A. ammette infinite soluzioni
- B. se $h > 0$ è una soluzione, allora anche $x = h + \pi$ lo è
- C. non ammette soluzioni
- D. ammette soltanto una soluzione
- E. ammette esattamente due soluzioni

Soluzione

Osserviamo preliminarmente che l'equazione assegnata ammette la soluzione $x = 0$, dato che $\sin 0 = 0$. Inoltre, dato che la funzione $\sin x$ assume valori nell'intervallo $[-1, 1]$, l'equazione assegnata non può ammettere soluzioni per valori della x all'esterno di tale intervallo. D'altra parte, osserviamo che

$$0 < x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x > 0 \quad \text{e} \quad -x < 0$$

quindi l'equazione assegnata non ha soluzioni se $x \in (0, 1]$. Analogamente

$$-1 \leq x < 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x < 0 \quad \text{e} \quad -x > 0$$

quindi l'equazione assegnata non ha soluzioni se $x \in [-1, 0)$. Concludiamo che l'unica soluzione è $x = 0$ e pertanto **la risposta esatta è la D.** ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 82

Risposta A:	4.35%	Risposte giuste:	20.39%
Risposta B:	2.10%	Risposte errate:	27.20%
Risposta C:	15.70%	Risposte non date:	52.41%
Risposta D:	20.39%		
Risposta E:	5.06%		

83. Nel salvadanaio di Geremia ci sono monete da 1 € e da 2 €, per un totale di 60 €. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
- A. Se il salvadanaio contiene almeno 30 monete, allora la maggior parte di queste sono da 2 €
 - B. Il numero di monete da 1 € non può essere uguale al numero di monete da 2 €
 - C. Se il salvadanaio contiene meno di 40 monete, allora la maggior parte di queste sono da 2 €
 - D. Il numero di monete da 1 € è sicuramente minore del numero di monete da 2 €
 - E. Il numero di monete da 1 € è sicuramente maggiore del numero di monete da 2 €

Soluzione

Cominciamo con l'osservare che la risposta A è sicuramente falsa perché non esclude la possibilità che ci siano 20 monete da 1 € e 20 monete da 2 €. Nella stessa eventualità sono false anche le risposte B, D ed E. Quindi **la risposta esatta è la C**. In modo analitico, si può procedere come segue: detto x il numero di monete da 1 € e detto y il numero di monete da 2 €, si ha che

$$x + 2y = 60 \quad \Leftrightarrow \quad x = 60 - 2y$$

Poiché tutte le risposte riguardano la relazione che sussiste tra il numero di monete da 1 € e quello delle monete da 2 €, analizziamo le soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x = 60 - 2y \\ x \leq y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 60 - 2y \leq y \\ x \leq y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geq 20 \\ x \leq y \end{cases}$$

La prima cosa che deduciamo dal sistema precedente è che il numero x delle monete da 1 € può essere uguale a quello y delle monete da 2 € e in tal caso si ha $x = y = 20$ e ciò implica che le risposte B, D, E sono false. Inoltre nel caso in cui $x = y = 20$ il salvadanaio contiene 40 monete (quindi più di 30) e ciò implica che anche la risposta A è falsa. Quindi la risposta esatta è la C. D'altra parte si può osservare che

$$\begin{cases} x = 60 - 2y \\ x + y < 40 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 60 - 2y \\ 60 - 2y + y < 40 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y > 20 \\ x < 20 \end{cases}$$

e ciò conferma che se il salvadanaio contiene meno di 40 monete, allora la maggior parte di queste sono da 2 €.

Risultati percentuali relativi al quesito 83

Risposta A:	18.26%	Risposte giuste:	40.20%
Risposta B:	21.94%	Risposte errate:	45.44%
Risposta C:	40.20%	Risposte non date:	14.36%
Risposta D:	1.89%		
Risposta E:	3.36%		

84. Il resto della divisione del polinomio $2x^3 - 3x + 2$ per $x - 2$ è:

- A. 8
- B. -1
- C. 12
- D. -8
- E. -12

Soluzione

Il Teorema del resto afferma che il resto della divisione di un polinomio per un binomio di primo grado si ottiene sostituendo nel polinomio alla variabile x la costante del binomio cambiata di segno, cioè

$$2x^3 - 3x + 2 : x - 2$$

ha un resto che si calcola come segue

$$R(2) = 2(2)^3 - 3(2) + 2 = 16 - 6 + 2 = 12$$

Quindi la risposta esatta è la C.



Risultati percentuali relativi al quesito 84

Risposta A:	5.18%	Risposte giuste:	36.66%
Risposta B:	4.17%	Risposte errate:	20.08%
Risposta C:	36.66%	Risposte non date:	43.26%
Risposta D:	7.24%		
Risposta E:	3.49%		

85. In un piano cartesiano consideriamo le rette r_k di equazione

$$y = kx + 2k + 1$$

dove k è un parametro reale. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- A. Le rette r_k sono a due a due incidenti, ma non esiste un punto comune a tutte
- B. Per $k = 0$ non si ottiene l'equazione di una retta
- C. Tutte le rette r_k passano per il punto $(1, -2)$
- D. Tutte le rette r_k passano per il punto $(-2, 1)$
- E. Le rette r_k sono parallele fra di loro

Soluzione

Ricordiamo che assegnato un punto $P(x_0, y_0)$ in un piano cartesiano, l'equazione del fascio di rette di centro il punto P ha equazione

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

dove m è un numero reale arbitrario. Le rette r_k assegnate hanno equazione che può essere riscritta nella forma

$$y - 1 = k(x + 2)$$

e questa è l'equazione del fascio di rette di centro il punto $(-2, 1)$. Quindi **la risposta esatta è la D.** ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 85

Risposta A:	8.52%	Risposte giuste:	24.10%
Risposta B:	4.52%	Risposte errate:	33.61%
Risposta C:	3.92%	Risposte non date:	42.29%
Risposta D:	24.10%		
Risposta E:	16.65%		

86. L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, \frac{y}{x} > 2\}$ è costituito da

- A. una delle parti di piano delimitate da una iperbole
- B. una corona circolare
- C. due angoli opposti al vertice
- D. un semipiano
- E. due semipiani

Soluzione

L'insieme assegnato può essere scritto nel modo seguente

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y > 2x\}$$

Quindi è costituito dai punti del piano cartesiano che si trovano al di sopra della retta di equazione $y = 2x$. Dunque **la risposta esatta è la D.** ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 86

Risposta A:	6.25%	Risposte giuste:	2.01%
Risposta B:	1.52%	Risposte errate:	16.57%
Risposta C:	2.01%	Risposte non date:	81.42%
Risposta D:	4.98%		
Risposta E:	3.83%		

87. Sia p un numero positivo dispari e q il numero dispari successivo. Si ha che

- A. $q^2 - p^2$ è divisibile per 16 e può non essere divisibile per 32
- B. $q^2 - p^2$ può essere dispari
- C. $q^2 - p^2$ è divisibile per 2 e può non essere divisibile per 4
- D. $q^2 - p^2$ è divisibile per 4 e può non essere divisibile per 8
- E. $q^2 - p^2$ è divisibile per 8 e può non essere divisibile per 16

Soluzione

Se p è un numero positivo dispari, allora esiste un numero naturale $h > 0$ tale che

$$p = 2h - 1$$

ed essendo q il numero dispari successivo si avrà

$$q = 2h + 1$$

Calcoliamo quindi la quantità $q^2 - p^2$ come segue

$$q^2 - p^2 = (2h + 1)^2 - (2h - 1)^2 = 4h^2 + 4h + 1 - (4h^2 - 4h + 1) = 8h$$

Quindi $q^2 - p^2$ è divisibile per 8 ma se h è dispari non è divisibile per 16. Dunque **la risposta esatta è la E.** ✓

Risultati percentuali relativi al quesito 87

Risposta A:	10.55%	Risposte giuste:	29.59%
Risposta B:	9.98%	Risposte errate:	41.09%
Risposta C:	14.37%	Risposte non date:	29.31%
Risposta D:	6.19%		
Risposta E:	29.59%		

88. L'espressione

$$\log(x^4 + 2x^2 + \sin^2 x + \cos^2 x)$$

coincide con

- A. $4 \log(1 + x)$
- B. $[\log(1 + x^2)]^2$
- C. $2 \log(1 + x^2)$
- D. $\log(x^4 + 2x^2) + \log(\sin^2 x + \cos^2 x)$
- E. $2 \log(1 + x + \sin x + \cos x)$

Soluzione

Usando l'identità trigonometrica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, si ha che l'espressione assegnata è

$$\log(x^4 + 2x^2 + 1)$$

ma

$$(x^4 + 2x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2$$

e quindi si ha

$$\log(x^4 + 2x^2 + \sin^2 x + \cos^2 x) = \log(x^2 + 1)^2$$

Ricordando che

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$$

abbiamo che

$$\log(x^4 + 2x^2 + \sin^2 x + \cos^2 x) = \log(x^2 + 1)^2 = 2 \log(x^2 + 1)$$

Dunque **la risposta esatta è la C.**



Risultati percentuali relativi al quesito 88

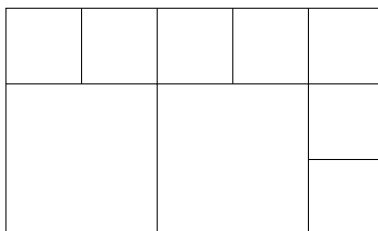
Risposta A:	1.44%	Risposte giuste:	33.41%
Risposta B:	5.06%	Risposte errate:	29.58%
Risposta C:	33.41%	Risposte non date:	37.02%
Risposta D:	19.88%		
Risposta E:	3.20%		

89. Un rettangolo è formato da due quadrati il cui lato misura 2 cm e da sette quadrati il cui lato misura 1 cm. Il perimetro del rettangolo misura:

- A. 22 cm
- B. 18 cm
- C. 24 cm
- D. 20 cm
- E. 16 cm

Soluzione

Il rettangolo in questione avrà un lato che misura 5 cm l'altro che misura 3 cm, perché è formato come nella figura seguente:



e, pur essendoci altri modi per disporre i due quadrati grandi e i sette quadrati piccoli, il rettangolo complessivo che si forma ha sempre il lato lungo di 5 cm e il lato corto di 3 cm. Pertanto il suo perimetro misura 16 cm. Dunque **la risposta esatta è la E.**



Risultati percentuali relativi al quesito 89

Risposta A:	7.17%	Risposte giuste:	55.33%
Risposta B:	7.15%	Risposte errate:	23.62%
Risposta C:	3.90%	Risposte non date:	21.05%
Risposta D:	5.40%		
Risposta E:	55.33%		



90. Dato n numero intero positivo, sia x_n la soluzione dell'equazione

$$\frac{x+1}{1} + \frac{x+2}{2} + \cdots + \frac{x+n}{n} = n$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- A. $x_n \neq 0$ per ogni n
- B. se $n_1 < n_2$ allora $x_{n_1} < x_{n_2}$
- C. se $n_1 < n_2$ allora $x_{n_1} > x_{n_2}$
- D. $x_n = x_{n+1} + 1$ per ogni n
- E. $x_n = x_{n+1}$ per ogni n

Soluzione

Osserviamo che

$$\frac{x+1}{1} + \frac{x+2}{2} + \cdots + \frac{x+n}{n} = n \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 + \frac{x}{2} + 1 + \cdots + \frac{x}{n} + 1 = n$$

e cioè

$$x \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ volte}} = n$$

che è equivalente a

$$x \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = 0$$

da cui ricaviamo che $x_n = 0$ per ogni n . Dunque **la risposta esatta è la E.**



Risultati percentuali relativi al quesito 90

Risposta A:	6.26%	Risposte giuste:	3.82%
Risposta B:	5.46%	Risposte errate:	19.05%
Risposta C:	5.00%	Risposte non date:	77.13%
Risposta D:	2.32%		
Risposta E:	3.82%		



Le risposte esatte

MATEMATICA

Numero Domanda	Risposta esatta
1	E
2	E
3	B
4	C
5	E
6	A
7	E
8	B
9	B
10	E
11	A
12	C
13	B
14	B
15	D
16	C
17	C
18	B
19	A
20	B
21	C
22	D
23	C
24	B
25	B
26	A
27	C
28	D
29	E
30	E
31	D
32	B
33	D
34	D
35	B
36	D
37	D
38	D
39	D
40	D
41	A
42	B
43	B
44	B
45	A

Numero Domanda	Risposta esatta
46	D
47	B
48	D
49	C
50	A
51	B
52	E
53	B
54	D
55	B
56	A
57	D
58	A
59	B
60	E
61	D
62	D
63	D
64	C
65	B
66	A
67	C
68	E
69	C
70	C
71	B
72	A
73	B
74	D
75	B
76	B
77	C
78	A
79	C
80	E
81	D
82	D
83	C
84	C
85	D
86	D
87	E
88	C
89	E
90	E

www.cisiaonline.it

ISBN 978-88-943567-2-4



9 788894 356724